

Ch 15 Decision analysis and Game

決策分析與賽局理論

15. DECISION ENVIRONMENTS

決策環境，從一決策者的觀點，決策過程可以分成三類

1. certainty 確定性，資料或將發生的事情為已知。

2. risk 風險，資料或將發生的事情可以某一機率分配表示

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

3. uncertainty 不確定，資料沒有辦法得知或以機率分配表示。

15.1 DECISION MAKING UNDER CERTAINTY - ANALYTIC HIERARCHY PROCESS (AHP)

LP (CH2 - CH8) 就是 decision making under certainty

在這一節介紹 ANALYTIC HIERARCHY PROCESS (AHP)

階層分析法，簡稱 AHP，將以一例子說明

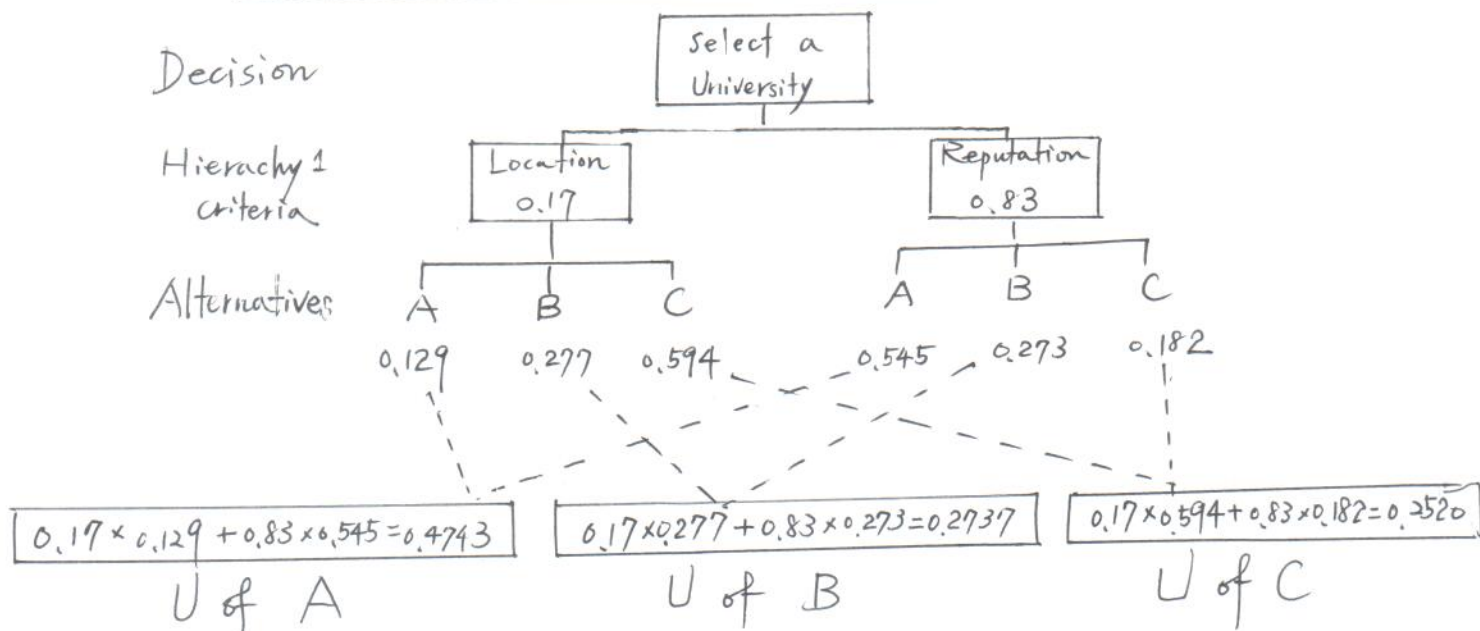
example 15.1-1

Martin Hans - 高中高年級學生, 接到 A、B、C 三間大學獎學金, 為了選擇一家學校, Martin 用二種主要選擇準則, 位置與學術聲望。

Martin 認為學術聲望是 5 倍重要於位置。

所以他給學術 83% 的權重, 位置 17% 的權重。他使用系統的方法去排列三所學校。三所學校關於位置、聲望相關权重如下:

	U of A	U of B	U of C
位置	12.9	27.7	59.4
聲望	54.5	27.3	18.2



基於上述計算, Martin 選擇 U of A, 因為它有最高的權重。

AHP 可能包含數個階層多種的準則，假設上例中，Martin 的雙胞姊妹，也接受三所大學的獎學金。父母要求他們要上同一所大學，以便共用一輛車。圖 15.2 摘要決策問題。

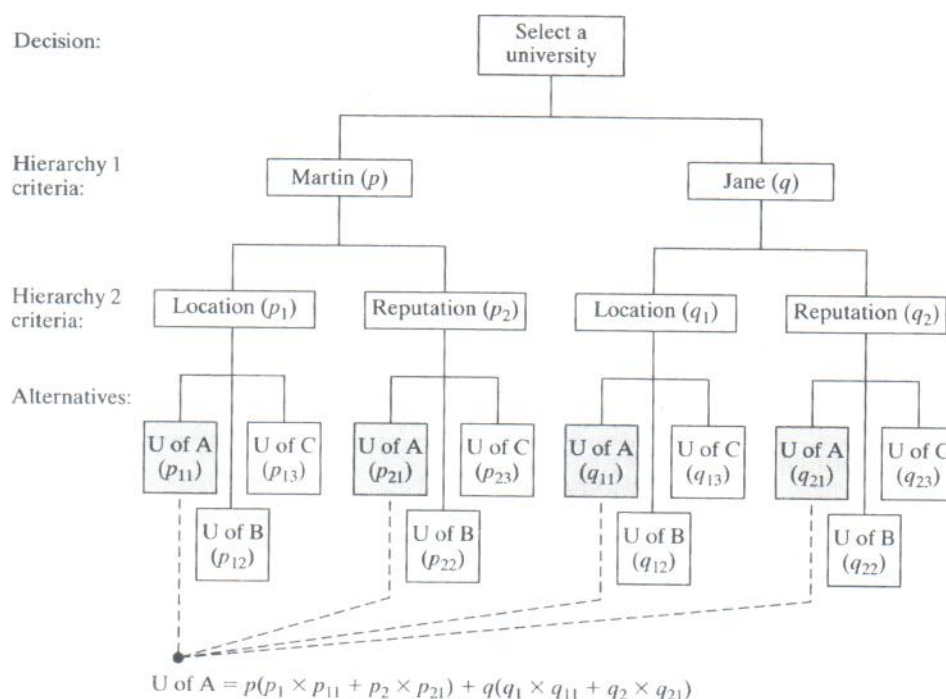


FIGURE 15.2

Embellishment of the decision problem of Example 15.1-1

現在包含兩階層的準則，假設 p 與 q 是相等的在第一層。 (p_1, p_2) 與 (q_1, q_2) 分別反映 Martin 和 Jane 的個人意見。

$$p + q = 1, \quad p_1 + p_2 = 1, \quad q_1 + q_2 = 1, \quad p_{11} + p_{12} + p_{13} = 1,$$

$$p_{21} + p_{22} + p_{23} = 1, \quad q_{11} + q_{12} + q_{13} = 1, \quad q_{21} + q_{22} + q_{23} = 1$$

圖 15.2 下方示範 U of A 的權重如何計算

AHP 的要點是決定相對的權重。假設要處理 n 項準則，則產生 $n \times n$ 的比較矩陣 A 。AHP 使用 1-9 的尺度， a_{ij} 代表 A 中的元素 $a_{ij}=1$ 代表 i 和 j 相同重要， $a_{ij}=5$ 反映 i 比 j 極為重要， $a_{ij}=9$ 反映 i 比 j 極端重要 (extremely more important)。 A 的所有對角線均為 1， $a_{ij}=k, a_{ji}=\frac{1}{k}$ 。

Example 15.1-2

為示範 A 如何決定，以 15.1-1 為例。

假設 Martin 認為聲望相較於位置極為重要 $a_{21}=5$ 所以 $a_{12}=\frac{1}{5}$ ，對角線給 1。

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} L \\ R \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} L & R \end{array} \left[\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{5} \\ 5 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

權重可由 A 矩陣計算而得。將 A 矩陣正規化得到 N 矩陣，取其列平均。

N 矩陣之獲得將每一元素除以該欄總和。

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} L \\ R \end{array} \end{array} \\ \begin{array}{cc} L & R \end{array} \left[\begin{array}{cc} 0.17 & 0.17 \\ 0.83 & 0.83 \end{array} \right]$$

$$W_L = \frac{0.17 + 0.17}{2} = 0.17$$

$$W_R = \frac{0.83 + 0.83}{2} = 0.83$$

NORMALIZED MATRIX 每一欄均相同代表 Decision Maker 完全一致， 2×2 一定會一致，更高階則未必。Martin 對三所大學聲望與位置之比較矩陣如下。

$$A_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_L - \text{column sum} [8 \quad 3.5 \quad 1.7]$$

$$A_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$A_R - \text{column sum} [1.83, 3.67, 5.5]$$

$$N_L = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.125 & 0.143 & 0.118 \\ 0.25 & 0.286 & 0.294 \\ 0.625 & 0.571 & 0.588 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W_{LA} = \frac{0.125 + 0.143 + 0.118}{3} = 0.129$$

$$W_{LB} = \frac{0.25 + 0.286 + 0.294}{3} = 0.277$$

$$W_{LC} = \frac{0.625 + 0.571 + 0.588}{3} = 0.594$$

$$N_R = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.545 & 0.545 & 0.545 \\ 0.273 & 0.273 & 0.273 \\ 0.182 & 0.182 & 0.182 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$W_{RA} = \frac{0.545 + 0.545 + 0.545}{3} = 0.545$$

$$W_{RB} = \frac{0.273 + 0.273 + 0.273}{3} = 0.273$$

$$W_{RC} = \frac{0.182 + 0.182 + 0.182}{3} = 0.182$$

比較矩陣的一致性

在上例中 N 和 N_R 每欄均相同，而 N_L 則不相同。代表 A 和 A_R 是一致的，而 A_L 不一致。一致代表決策呈現有條理的判斷。在數學上，如果矩陣一致，if $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$ for all i, j, k

例如 $a_{13}=3$ $a_{12}a_{23} = 2 \times \frac{3}{2} = 3$ 這項特性
需要每一欄，每一列均成立， 2×2 矩陣只
有 2×2 所以永遠一致。

如果所有比較矩陣是一致，這是不尋常
的。一般而言，某種程度的不一致是
合理的。為了決定矩陣的一致性是否
合理，需發展一可量化的衡量方
法。在 Example 15.1-2，一致的 A 產生一正
規化矩陣 N ，其中每欄均相同。

$$N = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \dots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \dots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n & w_n & \dots & w_n \end{bmatrix}$$

以相反程序決定 A ，每一欄 $/w_i$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

給定 A 的定義，

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{w_1}{w_2} & \dots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & 1 & \dots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n w_1 \\ n w_2 \\ \vdots \\ n w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

$$AW = nW$$

在 15.1-2 例中， A 是不一致的，相對權重 w_i 是由 N (normalized matrix) 每列 n 個元素平均而得。令 $\bar{w}$ 代表由計算而得權重可由證明而得 $A\bar{w} = n_{\max}\bar{w}$, $n_{\max} \geq n$

$n_{\max}$ 越接近 n 則越一致，基於上述觀察

AHP 計算 Consistency ratio - 一致比率

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

$$CI = \text{Consistency index of } A = \frac{n_{\max} - n}{n - 1}$$

$$RI = \text{Random consistency of } A = \frac{1.98(n-2)}{n}$$

CR ratio 如果小於 0.1，則不一致是可接受的，否則建議再產生一更一致的 A 。

Example 15.1-3 在 15.1-2 A_L 不一致, 因為 N_L 每一欄不相同. 為測試 N_L 一致性

首先計算 n_{max} , 由前例知道

$$\overline{w_1} = 0.129$$

$$\overline{w_2} = 0.277$$

$$\overline{w_3} = 0.594$$

$\therefore n_{max} = A_L \overline{w}$ 所有元素加總,

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.129 \\ 0.277 \\ 0.594 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3863 \\ 0.8320 \\ 1.793 \end{bmatrix}$$

$$n_{max} = 0.3863 + 0.8320 + 1.793 = 3.0113$$

$$n = 3$$

$$CI = \frac{n_{max} - n}{n - 1} = \frac{3.0113 - 3}{3} = 0.00565$$

$$RI = \frac{1.98(n-2)}{n} = \frac{1.98(3-2)}{3} = 0.66$$

$$CR = \frac{CI}{RI} = \frac{0.00565}{0.66} = 0.00856$$

因為 $CR < 0.1$ A_L 的不一致是可接受的

一、電子零組件分銷商經營管理之關鍵成功因素

問題：您認為上述四項評估因素（庫存管理、財務管理、快速反應下游廠商的需求、規模經濟），對貴公司經營幫助上，其相對重要性為何？

	絕對重要	相當重要	重要	稍微重要	相等重要	稍微不重要	重要	相當重要	絕對重要									
管理 庫存	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	管理 財務
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
管理 庫存	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	快速反應 下游廠商 的需求
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
管理 庫存	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	規模 經濟
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
管理 財務	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	快速反應 下游廠商 的需求
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
管理 財務	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	規模 經濟
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	
快速反應 下游 廠商的需求	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	規模 經濟
	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	

15.2 風險下決策 Decision Making Under Risk

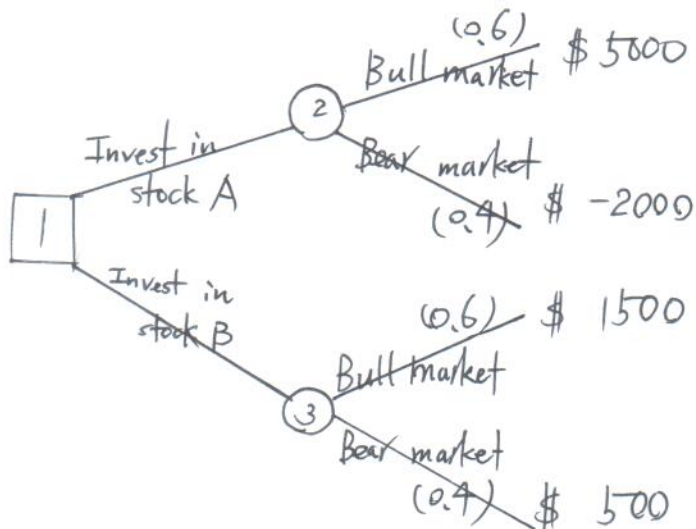
在風險下的決策，每種決策的報酬，通常伴隨著(或以)某種機率分配敘述，由於這理由，風險決策通常是基於期望值去選擇最大利潤或最小成本。

15.2.1 Decision Tree - Based Expected Value Criterion 決策樹

15.2-1 假設你有 10,000 元想投資在股票市場，有 A、B 兩公司可供選擇

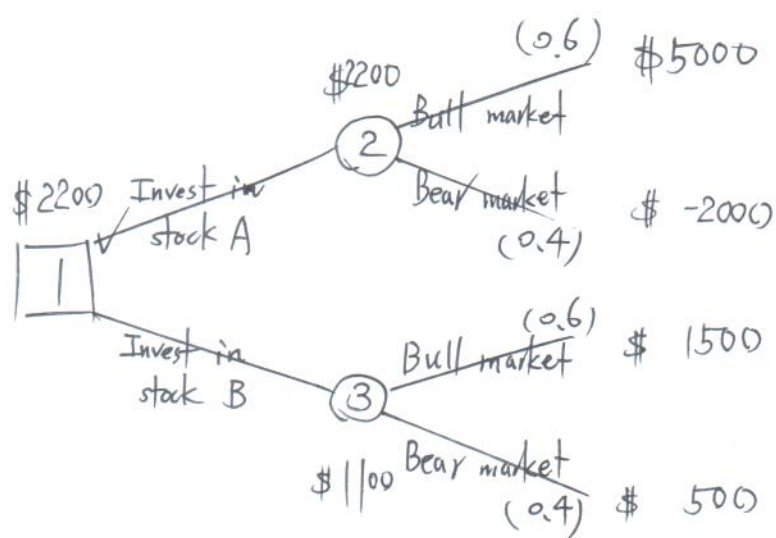
Decision alternatives	Bull Market	Bear Market
Company A stock	5000	-2000
Company B stock	1500	500
Probability of occurrence	0.6	0.4

這問題可以決策樹表示，如圖 15.4



決策樹有兩種節點 (node), (1) □ 決策節點: 要做決策 (2) ○ 機率事件節點: 會跟隨自然狀態發生。分枝亦可分成兩種 (1) 決策分枝, □—, 跟隨在 □ 之後, 必須的決策或可行方案 (2) 事件分枝, ○—, 跟隨在 ○ 之後, 可能產生的自然狀態與機率。

決策樹之計算, □ 選最佳方案 (利潤最大化或成本最小化), ○ 求期望值。



15.2.2 Variants of the Expected Value Criterion

Posterior (Bayes') probability 後驗(貝氏)機率

15.2-2 在 15.2-1 中, bull 與 bear 的機率為 0.6 與 0.4 是來自財務出版品 (prior probability 先驗機率一般由原始資料獲得)。假設你進行一項私人調查, 請教一位在股市投資十分良好的朋友。這位朋友提供一般的意見, “贊成”與“反對”投資。將其意見再細分。如果 bull market 有 90% 會贊成, 如果是 bear market 有 50% 會贊成。

$V_1 = \text{贊成}$, $V_2 = \text{反對}$, $m_1 = \text{bull market}$, $m_2 = \text{bear market}$.

朋友的建議, 可以寫成如下:

$$\begin{aligned} P\{V_1 | m_1\} &= 0.9 & P\{V_1 | m_2\} &= 0.5 \\ P\{V_2 | m_1\} &= 0.1 & P\{V_2 | m_2\} &= 0.5 \end{aligned}$$

以上述訊息, 決策問題可摘要如下:

1. 如果朋友“贊成”你將投資 A or B?
2. 如果朋友“反對”你將投資 A or B?

事實上這問題, 可以決策樹表示,

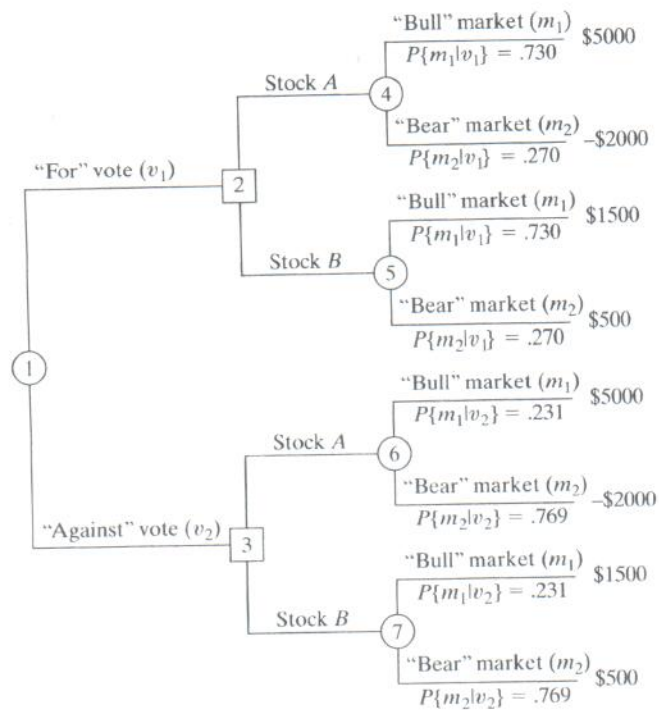


FIGURE 15.5

Decision tree for the stock market problem with posterior probabilities

為了評估不同的可行方案，必須計算後驗機率 $P\{m_i|v_j\}$ ，一般依據下列步驟進行。

step 1 彙整條件機率 $P\{v_j|m_i\}$

	v_1	v_2
m_1	0.9	0.1
m_2	0.5	0.5

step 2 計算聯合機率

$$P\{m_i, v_j\} = P\{v_j|m_i\} P\{m_i\}$$

給定 $P\{m_1\} = 0.6$, $P\{m_2\} = 0.4$

	v_1	v_2
m_1	0.54	0.06
m_2	0.2	0.2

$P\{m_i, v_j\} =$

step 3 計算絕對機率

$$p\{V_j\} = \sum_{\text{all } i} p\{m_i, V_j\}$$

$p\{V_1\}$	$p\{V_2\}$
0.74	0.26

step 4 計算想要的後驗機率

$$p\{m_i | V_j\} = \frac{p\{m_i, V_j\}}{p\{V_j\}}$$

	V_1	V_2
m_1	0.73	0.231
m_2	0.27	0.769

朋友建議“贊成”

在 node 4 之期望值 $5000 \times 0.73 + (-2000) \times 0.27 = 3110$

在 node 5 之期望值 $1500 \times 0.73 + (500) \times 0.27 = 1230$

Decision: 投資 stock A.

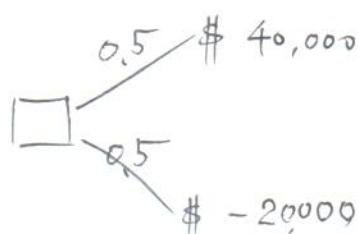
朋友建議“反對”

在 node 6 之期望值 $5000 \times 0.231 + (-2000) \times 0.769 = -383$

在 node 7 之期望值 $1500 \times 0.231 + 500 \times 0.769 = 731$

Decision: 投資 stock B.

效用函數 (Utility Functions) 前面報酬是用實際金錢，有時候分析時使用效率而不用金錢。有 20,000 元，其投資成敗之機率為 50-50



$$\begin{aligned}\text{Expected value} &= 0.5 \times 40,000 + 0.5 \times (-20,000) \\ &= -10,000\end{aligned}$$

有人願承受風險得 40,000 的利潤，保守的投資者不願損失 20,000，從這角度，不同的個人展現對風險不同的效用。

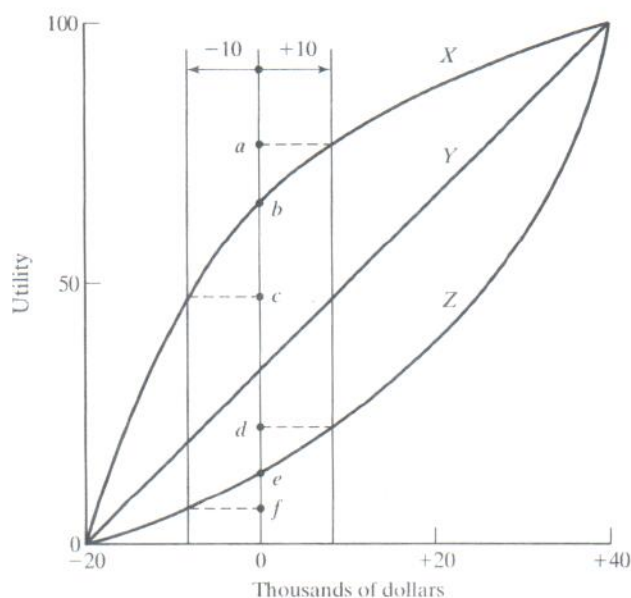


FIGURE 15.6

Utility functions for risk averse (X), neutral (Y), and risk seeker (Z) decision makers

風險中立 (risk neutral): Y 函數一直線，對風險無差異

風險規避 (risk averse): X 函數對風險呈現較高之敏感度相對於利潤。(保守)

風險追求 (risk seeker): 積極, Z 函數, 是風險規避者的相反, 對利潤呈現較高的敏感度。

以個人 X 為例, 以 0 為基準 $\pm 10,000$, 當 $+10,000$ 利潤, 效用增加 ab , 當 $-10,000$ 損失, 效用減少 bc , $bc > ab$ 對損失較敏感, 對利潤較不敏感, (風險規避者)

以個人 Z 為例, 當利潤 $+10,000$ 效用增加 de , 當 $-10,000$ 損失, 效用減少 ef , $de > ef$ 對利潤較損失敏感 (風險追求者)

效用函數之 Y 軸代表效用函數值, X 軸代表研究之屬性。在本例中屬性為現金, x 。 $U(x)$ 代表, 給定特定屬性下之效用值, 一般 $U(x)$ 由 0 至 100, 在本例中 $U(-20,000) = 0$, $U(40,000) = 100$ 分別代表最差與最佳之效用值。

為決定其他現金之效用值 (例如
-10,000, 0, 10,000, 20,000 與 30,000), 建立
一彩卷可得現金 x , 其效用值

$$\begin{aligned} U(x) &= p U(-20,000) + (1-p) U(40,000) \\ &= p \cdot 0 + (1-p) 100 \\ &= 100 - 100p \quad 0 \leq p \leq 1 \end{aligned}$$

為決定 $U(x)$, 決策者必須等效確定性
金額 x 可帶來的效用與機率性事
件, p 機率損失 -20,000 與 $1-p$ 機率利潤
40,000。機率 p 反映決策者對風險中立性,
例如 $x=20,000$ 與 $p=0.8$ 一樣吸引。

$$U(20,000) = 100 - 100(0.8) = 20.$$

較高 p 值反映較高風險追求 (相對於
風險規避)。例如 $p=0.2$

$$U(20,000) = 100 - 100(0.2) = 80$$

15.3 Decision Under Uncertainty 不確定性下決策

Decision matrix 決策矩陣

1. Laplace 準則: 由於缺乏訊息, 假設每一自然狀態發生的機率相同

	S_1	S_2	...	S_n
a_1	$v(a_1, S_1)$	$v(a_1, S_2)$	...	$v(a_1, S_n)$
a_2	$v(a_2, S_1)$	$v(a_2, S_2)$	...	$v(a_2, S_n)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a_m	$v(a_m, S_1)$	$v(a_m, S_2)$	...	$v(a_m, S_n)$

$$p\{S_1\} = p\{S_2\} = \dots = p\{S_n\} = \frac{1}{n}$$

$$\text{Gain} \quad \max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(a_i, S_j) \right\}$$

$$\text{Loss} \quad \min_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v(a_i, S_j) \right\}$$

2. maximin (minimax) 準則: 是保守準則, 由最壞的情形中選取最好的

$$\text{Gain} \quad \text{maximin 準則} \quad \max_{a_i} \left\{ \min_{S_j} v(a_i, S_j) \right\}$$

$$\text{Loss} \quad \text{minimax 準則} \quad \min_{a_i} \left\{ \max_{S_j} v(a_i, S_j) \right\}$$

3. Savage 準則 是適度保守準則, moderating minimax(maximin)
 首先建構 regret (Loss) matrix 後悔矩陣, 經由

$$r(a_i, s_j) = \begin{cases} v(a_i, s_j) - \min_k \{v(a_k, s_j)\} & , \text{ if } v \text{ is loss} \\ \max_k \{v(a_k, s_j)\} - v(a_i, s_j) & , \text{ if } v \text{ is gain} \end{cases}$$

下列顯示緩和 minimax (maximin) 準則

		s_1	s_2	Row max
Loss matrix	a_1	11000	90	11000
	a_2	10000	10000	10000 ← Minimax

		s_1	s_2	Row max
$r(a_i, s_j)$	a_1	1000	0	1000 ← Minimax
	a_2	0	9910	9910

使用 minimax 會選到一確定損失 a_2 方案,
 使用 Savage 準則會選到 a_1 方案, 有機會
 將損失降低至 90, 如果 s_2 發生

4. Hurwicz 準則: 用以反映決策者不同之態度
 可由 α 樂觀指數 ($0 \leq \alpha \leq 1$) 達成

$$\max_{a_i} \{ \alpha \max_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha) \min_{s_j} v(a_i, s_j) \}, \text{ if } v \text{ is gain}$$

$$\min_{a_i} \{ \alpha \min_{s_j} v(a_i, s_j) + (1-\alpha) \max_{s_j} v(a_i, s_j) \}, \text{ if } v \text{ is loss}$$

if $\alpha = 0$ 變成 minimax, if $\alpha = 1$ 變成 minimin (Loss)
 if $\alpha = 0$ 變成 maximin, if $\alpha = 1$ 變成 maximax (Gain)

Example 15.3-1 National Outdoors School 在阿拉斯加中心準備夏季營地訓練野外求生。參加人數可分成 4 類, 200, 250, 300, 350 人。營地成本將含是滿足參加人數最小, 偏離實際需求將引發額外成本, 建築或損失所得。令 a_1 至 a_4 代表 (200, 250, 300, 350) 之營地大小。 s_1 至 s_4 代表 (200, 250, 300, 350) 參加人數, 下表摘要相關成本 (單位千元)

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	5	10	18	25
a_2	8	7	12	23
a_3	21	18	12	21
a_4	30	22	19	15

分析這問題使用 4 種準則

Laplace $P\{s_j\} = \frac{1}{4}$

$$E\{a_1\} = \frac{1}{4} (5 + 10 + 18 + 25) = 14500$$

$$E\{a_2\} = \frac{1}{4} (8 + 7 + 12 + 23) = 12500 \leftarrow \text{Optimum}$$

$$E\{a_3\} = \frac{1}{4} (21 + 18 + 12 + 21) = 18000$$

$$E\{a_4\} = \frac{1}{4} (30 + 22 + 19 + 15) = 21500$$

Minimax

	S_1	S_2	S_3	S_4	Row max
a_1	5	10	18	25	25
a_2	8	7	12	23	23
a_3	21	18	12	21	21 ← Minimax
a_4	30	22	19	15	30

Savage

	S_1	S_2	S_3	S_4	Row max
a_1	0	3	6	10	10
a_2	3	0	0	8	8 ← Minimax
a_3	16	11	0	6	16
a_4	25	15	7	0	25

Hurwicz

Alternatives	Row min	Row max	$\alpha(\text{row min}) + (1-\alpha)(\text{row max})$
a_1	5	25	$25 - 20\alpha$
a_2	7	23	$23 - 16\alpha$
a_3	12	21	$21 - 9\alpha$
a_4	15	30	$30 - 15\alpha$

例如 $\alpha = 0.5$ a_1 與 a_2 最佳方案

$\alpha = 0.25$ a_3 最佳方案

15.4 Game Theory 对局(競賽)理論

Game theory 處理兩競爭對手有相互衝突的目標時，如何決策，典型的例子，包括發動廣告競爭與產品競爭較量。在对局理論中兩競爭對手(players)稱為競賽者(players)每位競賽者有一些可行方案(alternatives)或策略(strategies)。兩競賽者有一些策略，每一策略會伴隨(相對於)另一位競賽者的一策略會產生一報酬。這種競爭稱為 two-person zero sum game 兩人零和競賽。因為某一競賽者的利潤就是另一競賽者的損失。

	B_1	B_2	$\dots$	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$
A_m	a_{m1}	a_{m2}	$\dots$	a_{mn}

有競賽者 A、B 兩人，A 有 m strategies, B 有 n strategies, 通常以 A 的報酬表示, a_{ij} 代表 A 採取 i 策略, B 採取 j 策略對 A 的報酬, 對 B 而言, 報酬為 $-a_{ij}$

15.4.1 Optimal Solution of Two-Person Zero-Sum Games

Example 15.4-1 A、B 兩公司銷售流行感冒藥, A 公司在 radio (A_1), TV (A_2), newspaper (A_3) 廣告. B 公司在 radio (B_1), TV (B_2), newspaper (B_3), mail brochures (B_4).

	B_1	B_2	B_3	B_4	row min
A_1	8	-2	9	-3	-3
A_2	6	5	6	8	5 ← Maximin
A_3	-2	4	-9	5	-9
Column max	8	5	9	8	
		↑			
		Minimax			

取決於各公司的智慧, 與廣告競爭的強度, 每一公司都可以從另一公司獲得部分市場, 其損益摘要如矩陣表。

以 A 公司表示佔有市場的百分比或損失百分比，當 A 採用 A_1 strategy，不管 B 採用何種策略，A 最差的情形是損失 3% 市場給 B；同理 A 採用 A_2 ，A 會獲得 5% 市場從 B；A 採用 A_3 ，A 會損失 9% 市場給 B。

Assumption: 競爭的法則與競爭者行為假設

1. 雙方均知對方能採行的策略與報酬矩陣之值。
2. 雙方均為理性的，會採最有利行動。
3. 雙方皆以保守的方式選取最有利的行動。Row 所採的行動 Maximin, Column 所採的行動 Minimax.
4. 雙方均追求最大的期望報酬。

就 A 公司而言，A 會選擇 A_2 對應 maximin 值 (the best of the worst)。就 B 公司而言，B 會選擇 B_2 對應 Minimax 值 (the best of the worst)

最適解是 A_2B_2 ，亦即兩家公司都採用電視廣告。A公司將會增加 5% 市場佔有率，這種解稱為 Saddle point solution 鞍點解。競賽的價值 5%。鞍點解確保任一公司不會去選一更好的策略。例如 A 選擇停留在 A_2 策略，B 移向 B_1, B_3, B_4 則 B 會損失更多 (6% 與 8%)。同理，A 不會找尋另一策略，因會造成更多損失。[Pure strategy]

競賽的最佳解未必是 pure strategy。其解需要混合兩或更多策略。

Example 15.4-2 兩人 A、B 玩擲錢幣遊戲。同時選頭或尾，不告訴對方，然後兩人將錢幣同時翻出來。如果兩個頭或兩個尾 (TT, HH)，A 贏 B 1 元，其他則 A 輸給 B 1 元。

	B_H	B_T	Row min
A_H	1	-1	-1
A_T	-1	1	-1
Column max	1	1	

maximin 和 minimax 之值分別為 -1 與 1,
 Pure strategy 在這競賽不存在, 因為這兩數
 值不相同。A 選 Head, B 就會選 Tail
 從 A 贏 1 元。

$$\text{maximin value} \leq \text{value of the game} \leq \text{minimax value}$$

15.4.2 Solution of Mixed Strategy Games

混合策略賽局的解法有圖形解法與 LP。
 圖形法適合至少有一競賽者正好有兩純
 策略。LP 可用以解決任何兩人零和遊戲。

Graphical solution of games

		y_1	y_2	$\dots$	y_n
		B_1	B_2	$\dots$	B_n
x_1	A_1	a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{1n}
$1-x_1$	A_2	a_{21}	a_{22}	$\dots$	a_{2n}

A 選手採用 A_1 strategy 之機率為 x_1
 A 選手採用 A_2 strategy 之機率為 $1-x_1$
 B 選手採用 B_1 strategy 之機率為 y_1
 B 選手採用 B_2 strategy 之機率為 y_2
 B 選手採用 B_n strategy 之機率為 y_n

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

A 對應於 B 第 j 策略之期望報酬計算如下：

$$\begin{aligned} & x_1 a_{1j} + (1-x_1) a_{2j} \quad j=1, 2, \dots, n \\ & = (a_{1j} - a_{2j}) x_1 + a_{2j} \end{aligned}$$

A 競賽者尋求決定 x_1 值，會使最小期望報酬最大化 (maximize the minimum expected payoff)

$$\max_{x_1} \min_j \{ (a_{1j} - a_{2j}) x_1 + a_{2j} \}$$

Example 15.4-3

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	2	3	-1
A_2	4	3	2	6

沒有 pure strategy，所以要用混合策略

B's pure strategy	A's expected payoff
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-7x_1 + 6$

4條直綫代表B的 pure strategy, 為了決定 the best of the worst, 粗線代表 worst, 然後尋求一頂角, Maximin 點在 $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{5}{2}$ (係解)

代表 A 的最佳解. A_1 机率 0.5, A_2 机率 0.5
期望報酬 $\frac{5}{2}$ 。B 的最佳解由 B_3 和 B_4 混合
而決定 $\therefore y_1 = y_2 = 0 \quad y_4 = 1 - y_3$

A's pure strategy	B's expected payoff
1	$3y_3 + -1(1-y_3) = 4y_3 - 1$
2	$2y_3 + 6(1-y_3) = -4y_3 + 6$

解 $4y_3 - 1 = -4y_3 + 6$ $y_3 = \frac{7}{8}$ $v = 4 \cdot \frac{7}{8} - 1 = \frac{5}{2}$

Linear programming solution of games

競賽者 A 的最佳機率 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 可以經由求解下列問題獲得：

$$\max_{x_i} \left\{ \min \left(\sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} x_i \right) \right\}$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$\text{令 } v = \min \left\{ \sum_{i=1}^m a_{i1} x_i, \sum_{i=1}^m a_{i2} x_i, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} x_i \right\}$$

代表 $\sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \geq v, \quad j=1, \dots, n$

競賽者 A 問題可重寫如下

$$\text{Maximize } z = v$$

$$\text{s.t. } v - \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i \leq 0, \quad j=1, \dots, n$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$$

$$x_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$v \text{ unrestricted}$$

競賽者 B 的最佳機率 $y_1, y_2, \dots, y_n$ 可以
求解下列問題獲得

$$\min_{y_j} \left\{ \max \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} y_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} y_j \right) \right\}$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

問題可重寫成

$$\text{Minimize } w = v$$

st.

$$v - \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j \geq 0 \quad i=1, \dots, m$$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n = 1$$

$$y_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$v \text{ unrestricted}$$

Example 15.4-4

	B_1	B_2	B_3	Row min
A_1	3	-1	-3	-3
A_2	-2	4	-1	-2
A_3	-5	-6	2	-6
Column max	3	4	2	

Player A's LP

Maximize $Z = v$
st.

$$v - 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 0$$

$$v + x_1 - 4x_2 + 6x_3 \leq 0$$

$$v + 3x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0, \quad v \text{ unrestricted.}$$

optimum solution $x_1=0.39, x_2=0.31, x_3=0.29, v=-0.91$

player B's LP

Minimize $Z = v$

$$v - 3y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 0$$

$$v + 2y_1 - 4y_2 + y_3 \geq 0$$

$$v + 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 \geq 0$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$v \text{ unrestricted.}$$

optimum solution $y_1=0.32, y_2=0.08, y_3=0.6, v=-0.91$