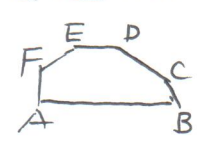


Chapter 3 單形法與敏感度分析

在第2章我們知道最佳解，總是在解空間的 extreme or corner 角落，例如

Figure 2.1 的 optimum solution 是在 C 桌上。

Simplex method 就是依據這個概念發展出來。例如由圖形解  可得知這些極點 (extreme point)，藉著辨認基本解而將圖形解，轉換成代數的步驟。基本上 simplex method 是一種演算法 (algorithm)，在每次運行 (iteration) 時，總是伴隨著一個基本解 (Basic solution)。

algorithm is any well-defined computational procedure that takes some value or set of values, as input and produces some value or set of values as output. An algorithm is thus a sequence of computational steps that transform the input into the output.

§ LP 的 standard form §

要運用單形法，首先要將 LP 化成 standard form，其步驟如下

1. 所有限制式變成等式且 RHS 非負
2. 所有變數是非負的
3. 目標函數是最大化或最小化。

1. 限制式為 $\leq$ 或 $\geq$

限制式為 $\leq$ 可加入 slack variable (鬆弛變數)

限制式為 $\geq$ 可減去 excess variable (過多變數)
surplus variable (盈餘變數)

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \quad s_1 \geq 0.$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 5$$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - s_2 = 5 \quad s_2 \geq 0$$

slack variable 代表限制式中未使用之資源，

surplus variable 代表限制式中過度滿足之部分

$$x_1 - x_2 \geq -2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 2 \quad s_3 \geq 0$$

2. 變數是非負的

例如 x 代表一不受符號限制之變數
(An unrestricted variable) 亦即 x 可以是正、負數或零

可令 $x = x^+ - x^-$ or $x' - x''$ 其中 $x^+, x^- \geq 0$
 $x', x'' \geq 0$

$$-6 = 0 - 6$$

$$10 = 10 - 0$$

$$0 = 0 - 0$$

3. 目標函數是最大化或最小化

standard LP 可以是最大化或最小化
有時將其中之一轉換成另一個對求
解是有幫助。例如

$\text{Max } z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$ 與 $\text{Min } (-z) = -5x_1 - 2x_2 - 3x_3$
是相等的，所以 x_1, x_2, x_3 會相同，
 z 值差一負號。

$$\text{Max } z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 \leq 100$$

$$x_2 \leq 100$$

$$50x_1 + 35x_2 \leq 6000$$

$$20x_1 + 15x_2 \geq 2000$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

standard form

$$\text{Max } z = 20x_1 + 15x_2$$

$$x_1 + s_1 = 100$$

$$x_2 + s_2 = 100$$

$$50x_1 + 35x_2 + s_3 = 6000$$

$$20x_1 + 15x_2 - s_4 = 2000$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

§ BASIC SOLUTIONS § 基本解

A basic solution to $AX=b$ is obtained by setting $n-m$ variables equal to 0 and solving for the values of the remaining m variables. This assumes that setting the $n-m$ variables (NBV) equal to 0 yields unique values for the remaining m variables (BV) are linearly independent.

Any basic solution to $AX=b$ in which all variables are nonnegative is a basic feasible solution (BFS).

e.g. $x_1 + x_2 = 3$

$$-x_2 + x_3 = -1$$

$n=3$ 變數數目 $m=2$ 限制式或方程式數目

$$NBV = (n - m) = (3 - 2) = 1$$

$$BV = 2$$

$$NBV = \{x_3\} = 0$$

$$BV = \{x_1, x_2\}$$

解 $x_1 + x_2 = 3$
 $-x_2 = -1$

$$x_2 = 1, x_1 = 2 \quad \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \{2, 1, 0\} \end{matrix} \leftarrow \text{BFS}$$

$$NBV = \{x_1\} = 0$$

$$BV = \{x_2, x_3\}$$

解 $x_2 = 3$
 $-x_2 + x_3 = -1$

$$x_2 = 3, x_3 = 2 \quad \{0, 3, 2\} \leftarrow \text{BFS}$$

$$NBV = \{x_2\} = 0$$

$$BV = \{x_1, x_3\}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_3 = -1$$

$$\{3, 0, -1\}$$

運用高斯消去法求解聯立方程組

$$\begin{cases} x+y+2z=9 \\ 2x+4y-3z=1 \\ 3x+6y-5z=0 \end{cases}$$

基本列運算

- ① 某一行乘上一實數
- ② 某一行乘上一實數，加至另一行
- ③ 交換任意兩行

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow (-2) \\ \leftarrow (-3) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \leftarrow (-3)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array} \right] (-2)$$

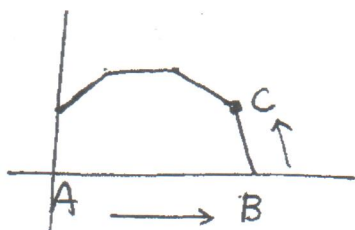
$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \leftarrow (-4)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & \frac{-7}{2} & \frac{-17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow (-\frac{11}{2}) \\ \leftarrow (\frac{7}{2}) \end{array} \frac{-11}{2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{array}$$

§ The Simplex Method. (PRIMAL SIMPLEX METHOD) §

從一個可行解的基本解開始，然後沿著臨近的端點，找尋最適解，直到找到最適解。



PRIMAL 就是把上述步驟，轉換成有系統的演算法。

step 0: 把問題變成標準型，決定一個開始可行基本解

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } &6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &-x_1 + x_2 \leq 1 \\ &x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ \text{s.t. } &6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24 \\ &x_1 + 2x_2 + s_2 = 6 \\ &-x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ &x_2 + s_4 = 2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$NBV = \{x_1, x_2\} = \{0, 0\}$$

$$\begin{aligned} BV &= \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \\ &= \{24, 6, 1, 2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z &= 5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 24 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

將 standard form 寫成 tableau form

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

不在 BASIC 下方的變數為非基本變數 'NBV'

$$\therefore \{x_1, x_2\} = \text{NBV} = \{0, 0\}$$

原方程式

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

tableau form 以移項至左邊表示,

$$Z - 5x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 - 0s_4 = 0$$

選 $\{x_1, x_2\} = NBV = 0$ $\{s_1, s_2, s_3, s_4\} = BV$

$$s_1 = 24 \quad s_2 = 6 \quad s_3 = 1 \quad s_4 = 2 \quad Z = 0$$

我們很容易就得到 starting solution 是由於

(1) 每條限制式都有一鬆弛變數 (也就鬆弛變數的數目 = 限制式的數目), 剩餘變數可以當作 $NBV = \{x_1, x_2\}$

(2) rhs of all constraints are nonnegative

step 1: 運用 optimality condition 做判斷, 由目前 NBV 中, 選擇 - 進入變數

Optimality Condition: entering variable in Max (Min) in the NBV with the most negative (positive) coefficient. The optimum is reached when all the NBV coefficient in the Z-equation are nonnegative (nonpositive)

例如從 optimization 的觀點, 進入變數一定是使 objective function 中的 Z 值有所改善

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

增加一單位 x_1 可增加 5 單位 profit.

增加一單位 x_2 可增加 4 單位 profit, 所以我們

會選擇 x_1 , 以 Tableau form 表示,

$$Z - 5x_1 - 4x_2 - 0s_1 - 0s_2 - 0s_3 - 0s_4 =$$

我們會選 -5 (The most negative).

step 2 運用 feasibility condition, 由現在 BV 選一變數為離去變數。

新的基本解的獲得是加入新的 BV, 所以我們必須從目前的 BV 選一離去變數, 以便重新求解。

Feasibility Condition: For both maximization and minimization problems, the leaving variable is the current basic variable having the small intercept (minimum ratio with strictly positive denominator) in the direction of the entering variable. A tie is broken arbitrarily.

$$\begin{array}{rcll} 6x_1 + 4x_2 & \leq & 24 & \textcircled{1} \\ x_1 + 2x_2 & \leq & 6 & \textcircled{2} \\ -x_1 + x_2 & \leq & 1 & \textcircled{3} \\ x_1 & \leq & 2 & \textcircled{4} \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{24}{6} = 4 \leftarrow (\text{Minimum}) \\ \frac{6}{1} = 6 \\ \frac{1}{-1} = -1 \text{ 不考慮} \\ \frac{2}{0} = \infty \text{ 不考慮} \end{array}$$

另一種想法, 我們想增加 x_1 , 而什麼是同時滿足這些限制式的 x_1 。

① $x_1=4$ ② $x_1=6$ ③ $x_1=-1$ ④ 沒有 $\therefore x_1=4$

第一式對應 S_1 是離去變數。

step 3 決定新基本變數的值, 回到 step 1

NBV

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

$n=6$
 $m=4$

entering column

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

pivot row
離去變數

$\frac{24}{6} = 4$ (minimum)
 $\frac{6}{1} = 6$
 $\frac{1}{-1} = -1$ (不考慮)
 $\frac{2}{0} = \infty$ (不考慮)

找出新的基本解的步驟

(1) 將 Pivot equation $\div$ Pivot element

(2) 運用 ERO 將 entering column 化成 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 形式

(1)

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

(2)

接上頁

進入變數

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	0	0	0	20
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	0	0	4 $\frac{4}{3} = 6$
s_2	0	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	2 $\frac{2}{4} = \frac{3}{2}$ min
s_3	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	1	0	5 $\frac{5}{5} = 3$
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2 $\frac{2}{1} = 2$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

} 對應 C 點

NBV = $\{s_1, s_2\}$ 均為非負，所以停止，
上述為最佳解。

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2$$

st.

$$x_1 + x_2 \leq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 - x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$$

$$x_1 - x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

$$\text{令 } \{x_1, x_2\} = \text{NBV} = \{0, 0\} \quad \{s_1, s_2\} = \text{BV} = \{4, 6\} \quad Z = 0$$

↓ 進入 min 選最大正數 (由 NBV 中)

BASIC	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	-2	3	0	0	0

$\Rightarrow s_1$	1	①	1	0	4
s_2	1	-1	0	1	6

$$\frac{4}{1} = 4 \quad \text{選最小}$$

停止條件 沒有進入變數可供選擇 在 min 問題中

BASIC	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	-5	0	-3	0	-12
x_2	1	1	1	0	4
s_2	2	0	1	1	10

NBV 之係數均為 ≤ 0 .

P/Pd-

(Min)

Summary of the Simplex Algorithm for a Max Prob

step 0: Convert the LP to standard form.

step 1: Find a basic feasible solution. This is easy if all the constraints are $\leq$ with nonnegative right-hand sides. Then the slack variables S_i may be used as the basic variable for row i . If no bfs is readily apparent, use the M-method to find a bfs.

step 2: If all nonbasic variables have nonnegative (nonpositive) coefficient in row 0 (objective function), the current bfs is optimal. If any variables in row 0 (objective function) have negative (positive) coefficients, choose the variable with the most negative (positive) in row 0 (objective function) to enter the basis. We call this variable the entering variable.

step 3: Use θ -rules to make the entering variable the basic variable in any row that win the ratio test (ties may be broken arbitrarily). After the θ -rules have been used to create a new canonical form, return to Step 2 using the current canonical form.

§ Big M Method (大M法) §

在 Primal Simplex Method 求解過程中，必須求出 initial solution，由於 Primal Simplex Method 的限制式都是 $\leq$ 型式，所以非常容易找出 initial solution。但是如果限制式是 $\geq$ 或 $=$ 的型式，我們就無法很簡單找出 initial solution。因此必須藉助人造變數 (artificial variables) 作為媒介物，否則無法進行求解過程。

在有人造變數的問題中，最佳解不能存在任何人造變數，也就是人造變數為 0，求解過程中必須逐一將人造變數去掉。

M 是一很大的正數，在 Maximization 的問題中，用 $-MR$ 代表 - penalty cost 其中 R 為人造變數，若 $R=0$ ，則 $-MR=0$ Maximization 問題有解，否則 Maximization 問題無解。同理，Minimization 問題中用 $+MR$ 代表 - penalty cost，若 $R=0$ ，則 $+MR=0$ ，Minimization 問題有解。

大M法的求解過程和 Primal Simplex Method 相同。

$$\text{Minimize } Z = 4X_1 + X_2$$

s.t.,

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

化成 standard form $X_1, X_2 \geq 0$

$$\text{Minimize } Z = 4X_1 + X_2$$

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

第一、二式沒有 slack variables 無法如同以前 simplex method 很快找出 initial solution.

於是原來 = 與 $\geq$ 式中加入人造變數

$$\text{Minimize } Z = 4X_1 + X_2 + MR_1 + MR_2$$

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 4.$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0$$

加入人造變數的理由, 就是希望很快找出 starting feasible solution, 例如我們設

$$NBV = \{x_1, x_2, x_3\} = 0, \text{ 則 } R_1 = 3, R_2 = 6, x_4 = 4$$

將 $R_1 = 3 - 3x_1 - x_2$ 換成 NBV 表示
 $R_2 = 6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3$

其理由, 不換成 NBV 表示, 會找不到 entering variables

$$Z = 4x_1 + x_2 + M(3 - 3x_1 - x_2) + M(6 - 4x_1 - 3x_2 + x_3)$$

$$= 4x_1 - 7Mx_1 + x_2 - 4Mx_2 + Mx_3 + 9M$$

$$Z - (4 - 7M)x_1 - (1 - 4M)x_2 - Mx_3 = 9M$$

$$Z + (7M - 4)x_1 + (4M - 1)x_2 - Mx_3 = 9M$$

BASIC	Z	^{entering} X ₁	X ₂	X ₃	R ₁	R ₂	X ₄	Solution
Z	1	7M-4	4M-1	-M	0	0	0	9M
R ₁	0	3	1	0	1	0	0	3 $\frac{3}{3}=1(\text{min})$
R ₂	0	4	3	-1	0	1	0	6 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$
X ₄	0	1	2	0	0	0	1	4 $\frac{4}{1}=4$

BASIC	Z	X_1	X_2 ^{entering}	X_3	R_1	R_2	X_4	Solution
Z	1	0	$\frac{1+5M}{3}$	$-M$	$\frac{4-7M}{3}$	0	0	$4+2M$
X_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1 $\frac{1}{3}=3$
R_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	1	0	2 $\frac{2}{3}=\frac{6}{3} \min$
X_4	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	1	3 $\frac{3}{3}=\frac{9}{3}$

BASIC	Z	X_1	X_2	X_3 ^{entering}	R_1	R_2	X_4	Solution
Z	1	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{5}-M$	$-\frac{1}{5}-M$	0	$\frac{18}{5}$
X_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5} \frac{3}{5}=3$
X_2	0	0	1	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
X_4	0	0	0	1	1	-1	1	1 $\frac{1}{1}=1 \min$

BASIC	Z	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solution
Z	1	0	0	0	$\frac{7}{5}-M$	$-M$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{17}{5}$
X_1	0	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
X_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
X_3	0	0	0	1	1	-1	1	1

$R_1 = R_2 = 0$ 不在 BASIC 之下.

§ The two-phase method § 兩階段法

在大M法中，M選的太大可能有計算錯誤而且計算上甚為費時，兩階段法的設計就是把除去M的工作，分成兩個階段。

在階段I，加入必需的人造變數，找到一開始的可行解，在這個階段，其主要目的就是使人造變數之和最小，也就是目標函數值是0，則問題有解，進入階段II；若目標函數不為零，則問題無解，停止求解。

在階段II，用第I階段的最佳基本解當做起始解，然後解原來的問題。

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= 4X_1 + X_2 \\ \text{s.t.} \quad &3X_1 + X_2 = 3 \\ &4X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ &X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ &X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

階段I

$$\begin{aligned} \text{Minimize } P &= R_1 + R_2 \\ \text{s.t.} \quad &3X_1 + X_2 + R_1 = 3 \\ &4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6 \\ &X_1 + 2X_2 + X_4 = 4 \\ &X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0 \end{aligned}$$

如同大M法一樣, 我們首先把 R_1 和 R_2 代入目標函數 $r = R_1 + R_2$

$$R_1 = 3 - 3X_1 - X_2$$

$$R_2 = 6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3$$

$$r = -7X_1 - 4X_2 + X_3 + 9$$

BASIC	r	^{entering} X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solution
r	1	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	0	3	1	0	1	0	0	3 $\frac{3}{3}=1$ min
R_2	0	4	3	-1	0	1	0	6 $\frac{6}{4}=1.5$
X_4	0	1	2	0	0	0	1	4 $\frac{4}{1}=4$

BASIC	r	X_1	^{entering} X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solution
r	1	0	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{-7}{3}$	0	0	2
X_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	1 $\frac{1}{3}=3$
R_2	0	0	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$	1	0	2 $\frac{2}{\frac{5}{3}}=\frac{6}{5}$ min
X_4	0	0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{-1}{3}$	0	1	3 $\frac{3}{\frac{5}{3}}=\frac{9}{5}$

BASIC	r	X_1	X_2	X_3	R_1	R_2	X_4	Solution
r	1	0	0	0	-1	-1	0	0
X_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X_2	0	0	1	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
X_4	0	0	0	1	1	-1	1	1

$$R_1 = R_2 = 0 = \text{NBV} \quad r = 0$$

停止 Phase I, 此問題有解.
進入 Phase II.

去除 R_1, R_2 兩欄.

$$X_1 + \frac{1}{5}X_3 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}X_3 = \frac{6}{5}$$

$$X_3 + X_4 = 1$$

這些限制式與原來 standard form 限制式是 row-equivalent, 所以原問題可以表達如下

$$\text{Minimize } Z = 4X_1 + X_2$$

s.t.

$$X_1 + \frac{1}{5}X_3 = \frac{3}{5}$$

$$X_2 - \frac{3}{5}X_3 = \frac{6}{5}$$

$$X_3 + X_4 = 1$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

$$\text{令 } NBV = X_3 = 0 \quad X_1 = \frac{3}{5}, \quad X_2 = \frac{6}{5}, \quad X_4 = 1.$$

$$Z = 4X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 4 \cdot \frac{3}{5} + \frac{6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$X_1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}X_3$$

$$X_2 = \frac{6}{5} + \frac{3}{5}X_3$$

如同大M法, 將其換成 NBV.
並代入 objective function 整理

$$Z = 4X_1 + X_2$$

$$= 4\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}X_3\right) + \frac{6}{5} + \frac{3}{5}X_3$$

$$= -\frac{1}{5}X_3 + \frac{18}{5}$$

BASIC	Z	X_1	X_2	X_3 ^{entering}	X_4	Solution
Z	1	0	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{18}{5}$
X_1	0	1	0	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
X_2	0	0	1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
X_4	0	0	0	1	1	1

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{5}} = 3$$

$$1 = 1 \text{ (min)}$$

BASIC	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	Solution
Z	1	0	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
X_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
X_2	0	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$
X_3	0	0	0	1	1	1

§ DUAL SIMPLEX METHOD § 對偶單形法

留在後面再講