

CHAPTER 4 Duality and Post-Optimal Analysis

LP 中原有的模式，我們稱為原始 (Primal) 或原有的模式 (Original)，原始它有一非常特殊的伙伴，透過它可以瞭解其隱含的內在經濟意義。其所對應的最佳化問題 (Optimization) 稱為「對偶問題」 (Dual)。兩者有相當親密的關係，當其中之一求得最佳解，則另一個必定存在最佳解。

原始問題亦對偶問題甚為深除在數學上可以證明以外，並且可以透過經濟意義加以解釋。例如原始問題是資源，分派於不同生產者之選擇，則對偶問題所求得者即是這些資源的價格。這些價格並非資源在市場上的價格而

是廠商自己按其生產活動所計算出來的機會成本。

對偶問題的定義

原始問題之標準型定義如下：

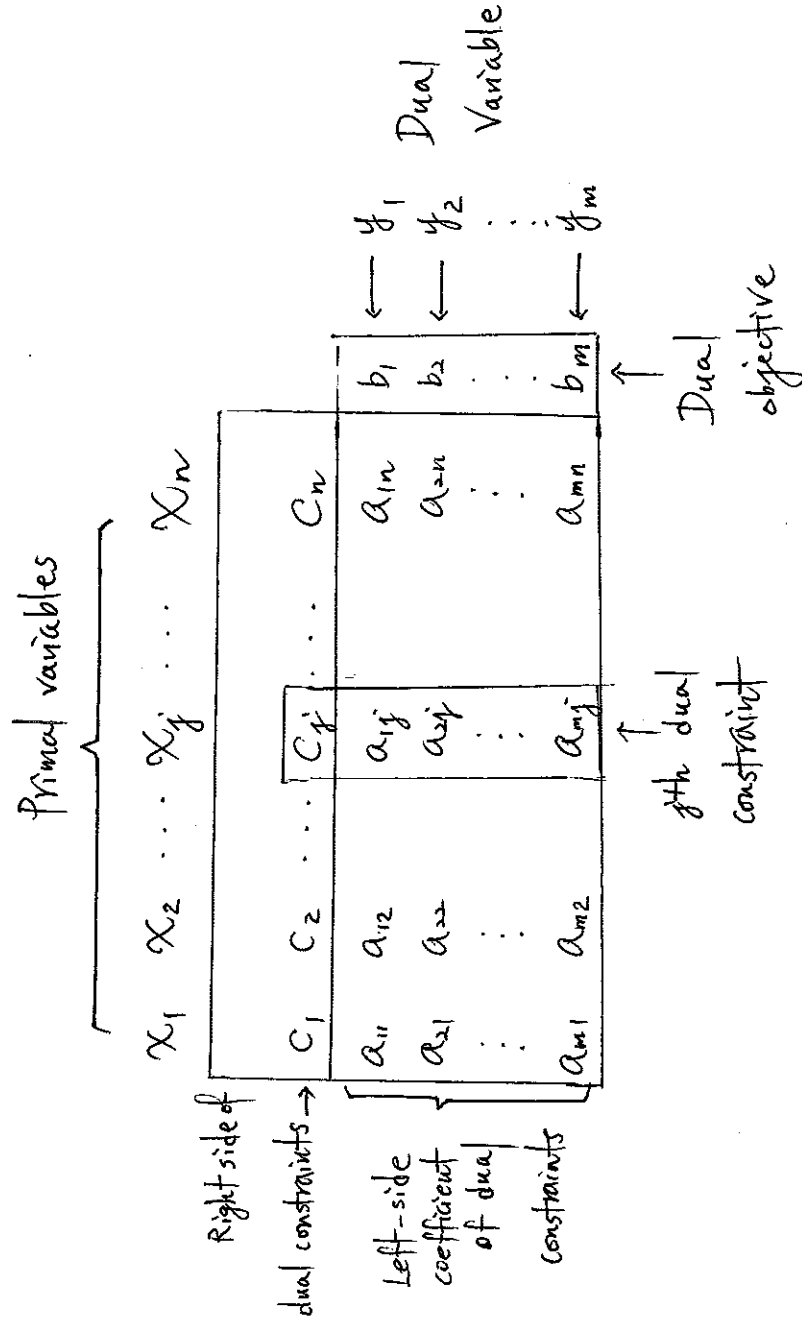
$$\text{Maximize (or Minimize)} \quad Z = \sum_{j=1}^n C_j X_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j = b_i \quad i=1, \dots, m$$

$$X_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n$$

其中 n variables X_j 包含 surplus, slack 和 artificals
建立對偶問題的方法。



Standard Primal	Dual		
objective	Objective	Constraints	Variables
Maximization	Minimization	$\geq$	Unrestricted
Minimization	Maximization	$\leq$	Unrestricted

Example 4.1-1

Primal Maximize $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

standard primal Maximize $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10 \quad \leftarrow y_1$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \quad \leftarrow y_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Dual Minimize $W = 10y_1 + 8y_2$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 + 0y_2 \geq 0$$

y_1, y_2 , unrestricted in sign.

↯

y_2 unrestricted in sign.

Example 4.1-2

$$\text{Minimize } Z = 15x_1 + 12x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 15$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

standard form

$$\text{Minimize } Z = 15x_1 + 12x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$x_1 + x_2 - x_3 = 15 \quad \leftarrow y_1$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \quad \leftarrow y_2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Dual problem

$$\text{Maximize } W = 15y_1 + 5y_2$$

s.t.

$$y_1 + 2y_2 \leq 15$$

$$y_1 + 3y_2 \leq 12$$

$$-y_1 + 0y_2 \leq 0 \quad \left. \begin{array}{l} -y_1 + 0y_2 \leq 0 \\ 0y_1 + y_2 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 \geq 0 \\ y_2 \leq 0 \end{array}$$

$$0y_1 + y_2 \leq 0$$

$$y_1, y_2 \text{ unrestricted}$$

Example 4.1-3

$$\text{Maximize } Z = 5x_1 + 6x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$-x_1 + 5x_2 \geq 3$$

$$4x_1 + 7x_2 \leq 8$$

x_1 unrestricted in sign, $x_2 \geq 0$

standard form

$$\text{令 } x_1 = x_1' - x_1'' \text{ 其中 } x_1', x_1'' \geq 0$$

$$\text{Maximize } Z = 5(x_1' - x_1'') + 6x_2$$

s.t.

$$x_1' - x_1'' + 2x_2 = 5$$

$$-(x_1' - x_1'') + 5x_2 - x_3 = 3$$

$$4(x_1' - x_1'') + 7x_2 + x_4 = 8$$

$$x_1', x_1'', x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\text{Maximize } Z = 5x'_1 - 5x''_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$x'_1 - x''_1 + 2x_2 = 5 \leftarrow y_1$$

$$-x'_1 + x''_1 + 5x_2 - x_3 = 3 \leftarrow y_2$$

$$4x'_1 - 4x''_1 + 7x_2 + x_4 = 8 \leftarrow y_3$$

$$x'_1, x''_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

$$\text{dual Minimize } W = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

$$y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 5 \quad \Rightarrow y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$-y_1 + y_2 - 4y_3 \geq -5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

$$\begin{array}{l} -y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} y_2 \leq 0 \\ y_3 \geq 0 \end{array}$$

y_1, y_2, y_3 unrestricted in sign

整理後, dual problem.

$$\text{Minimize } W = 5y_1 + 3y_2 + 8y_3$$

$$y_1 - y_2 + 4y_3 = 5$$

$$2y_1 + 5y_2 + 7y_3 \geq 6$$

y_1 unrestricted in sign, $y_2 \leq 0$, $y_3 \geq 0$

4.2 PRIMAL-DUAL RELATIONSHIPS

4.2.1 Review of Simple Matrix Operations

1. 矩陣, A , of size $(m \times n)$ 是一長方形陣列
有 m 列, n 行. 的元素,

2. 列向量, V of size m 是 $1 \times m$ 的矩陣

3. 行向量, P of size n 是 $n \times 1$ 的矩陣.

矩陣運算 (Scalar $\times$ matrix, αA)

$$10 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} = A$$

$A + B$
可運算 $A+B$
size 相同

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 10 & 12 & 14 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 14 & 26 & 38 \\ 50 & 62 & 74 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 6 & 14 & 22 \\ 30 & 38 & 46 \end{bmatrix}$$

$A \times B = AB_{m \times q}$ 矩陣乘法可運算之條件

① A 矩陣之行數 = B 矩陣之列數

② 新矩陣之 size 為 A 矩陣之

列數 $\times B$ 矩陣之行數

$$A_{3 \times 2} B_{2 \times 2} = AB_{3 \times 2}$$

↑ ① ↑ ②

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 4 \times 2 & 1 \times 3 + 4 \times 4 \\ 2 \times 1 + 5 \times 2 & 2 \times 3 + 5 \times 4 \\ 3 \times 1 + 6 \times 2 & 3 \times 3 + 6 \times 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 9 & 19 \\ 12 & 26 \\ 15 & 33 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

A 為 n 階方陣. 若存在一 3 陣 B 使得

$$AB = BA = I_n \text{ 則稱 } A \text{ 為 (nonsingular matrix)}$$

或 (invertible matrix). 並稱 B 為 A 之 (inverse matrix)

逆矩陣. 並以符號 A^{-1} 代表.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \text{ 試求 } A^{-1}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(-4)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 0 & 1 \end{array} \right] & [A | I] \\ & \xrightarrow{(-2)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right] & [A^{-1}A | A^{-1}I] \\ & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 9 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right] & [I | A^{-1}] \end{aligned}$$

$$I \quad A^{-1}$$

4.2.2 Simplex Tableau Layout

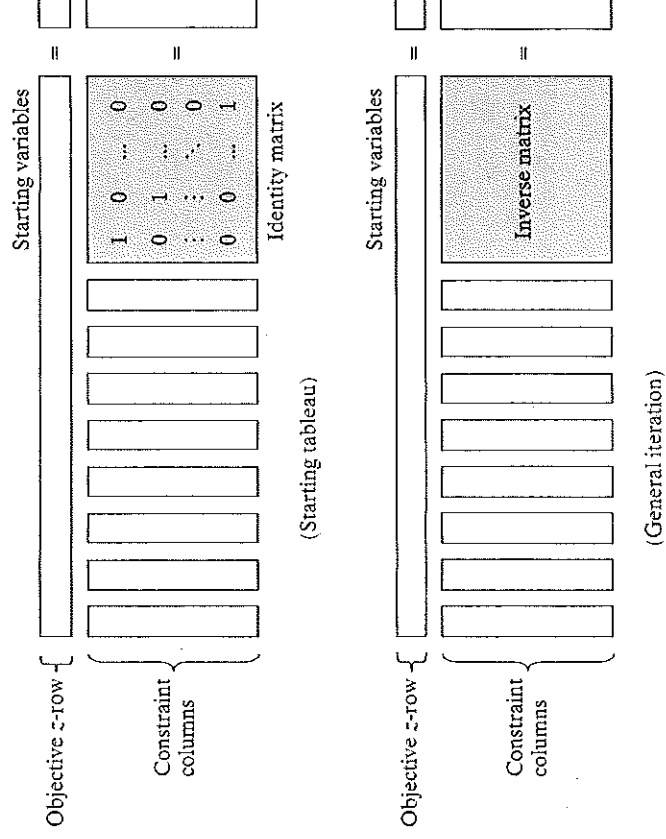


FIGURE 4.1

Schematic representation of the starting and general simplex tableaux

將第三章之運算結果，可以 Figure 4.1 表示，上圖可代表一起始解，起始變數對應到一單位矩陣 (Identity matrix)。下圖代表一般運算運行的結果，逆矩陣 (Inverse matrix) 是用來計算這個表格其他元素之關鍵。在本章往後章節將示範如何完成表格其他元素連用逆矩陣。

第3章例子之起始表

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

單位矩陣 $\uparrow$

最佳解表格

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	1	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	21
x_1	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	3
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$
s_3	0	0	0	$\frac{3}{8}$	$-\frac{5}{4}$	1	0	$\frac{5}{2}$
s_4	0	0	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	$\frac{1}{2}$

逆矩陣 $\uparrow$

補充說明

BASIC x_j Solution

Z $C_B B^{-1} p_j - C_j$ $C_B B^{-1} b$

x_B $B^{-1} p_j$ $B^{-1} b$

詳 Ch 7, 證明略,

其中 B^{-1} 為逆矩陣, b 為原問題 RHS 係數, P_i 為原問題 X_i 之行向量,

C_B 為原問題基本變數對應之目標函數係數。

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2. \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$b = \begin{bmatrix} 24 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$C_B = [x_1, x_2, s_3, s_4] = [5, 4, 0, 0]$$

$$C_B \cdot B^{-1}b = [5, 4, 0, 0] \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 15 + 6 + 0 + 0 = 21$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}P_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理 $B^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} B^{-1}P_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$B^{-1}P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}P_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C_B = [x_1, x_2, s_3, s_4] = [5, 4, 0, 0]$ C_j 係原問題各變數

對應之係數

$$C_B B^{-1}P_j - C_j$$

$$j=1 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 5 = 0$$

$$j=2 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 4 = 0$$

$$j=3 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} - 0 = \frac{3}{4}$$

$$j=4 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} - 0 = \frac{1}{2}$$

$$j=5 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

$$j=6 \quad [5 \ 4 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 0$$

在任一次運算

只要知道 B^{-1}

與原問題，即

可完成表格

其他任一部

分

4.2.3 Optimal Dual Solution

原始與對偶問題緊密相關，原始問題的最佳解，再加上一些計算即可得到對偶問題的最佳解，(無需重新計算對偶問題)。本節提供兩種方法計算這種結果

[方法 1]

$$\left(\begin{array}{c} \text{對偶變數} \\ \text{最佳解} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{原始問題最佳解時, 基} \\ \text{本變數 (依順序) 在原始問題} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{最佳原始} \\ \text{逆矩陣} \end{array} \right)$$

[方法 2]

$$\left(\begin{array}{c} \text{對偶變數} \\ \text{最佳解 } y_i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{原始起始變數 } x_i \text{ 在最佳表格 } Z \text{ 之係數} \\ + \\ x_i \text{ 原始目標函數之係數} \end{array} \right)$$

Example 4.2-1

$$\text{Maximize } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Primal

Dual

$$\text{Max } Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 - MR$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + R = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, R \geq 0$$

$$\text{Min } w = 10y_1 + 8y_2$$

s.t.

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$2y_1 - y_2 \geq 12$$

$$y_1 + 3y_2 \geq 4$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq -M (\Rightarrow y_2 \text{ unrestricted})$$

Optimal Tableau of the Primal of Example 4.2-1

BASIC	x_1	x_2	x_3	x_4	R	Solution
Z	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$	$54\frac{4}{5}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{12}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{26}{5}$

starting variables

$$\text{optimal inverse} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

方法 1. The order of the optimal basic variables

original objective coefficients = $[x_2, x_1]$

$$= [12, 5]$$

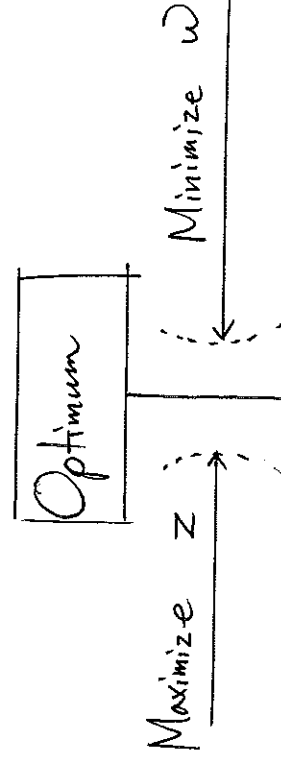
$$[y_1, y_2] = [12, 5] \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \left[\frac{29}{5}, \frac{-2}{5} \right]$$

方法 2.

原始起始基本變數	x_4	R
Z-equation 係數	$\frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M$
原始目標函數係數	0	$-M$
對偶變數最佳解	$\frac{29}{5} + 0 = \frac{29}{5}$	$-\frac{2}{5} + M + (-M) = -\frac{2}{5}$
對偶變數	y_1	y_2

Primal - dual objective values

For any pair of feasible primal and dual solutions
 (objective value in the maximization problem) $\leq$ (objective value in the minimization problem)



等式成立於最佳解 ($z = w$)。當 $z < w$ 最佳解不可能成立，因為 z 與 w 不管多接近，總有改善空間。

Example 4.2-2

在 Example 4.2-1. 在任意的 - 可行解.

$$(x_1=0, x_2=0, x_3=\frac{8}{3}) \quad (y_1=6, y_2=0).$$

其目標函數值為

$$Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 = 4 \cdot \frac{8}{3} = 10 \frac{2}{3}$$

$$W = 10y_1 + 8y_2 = 10 \cdot 6 = 60$$

$$Z < W$$

最佳解 $Z = 54 \frac{4}{6}$ 介於 $(10 \frac{2}{3}, 60)$ 之間

4.2.4 Simplex Tableau Computations

本小節將示範在任一次運算的 simplex 表格, 可由原始資料及逆矩陣 inverse matrix 而得。

我們將計算分成二大類:

(1) 限制式 constraint columns (left and right hand side)

(2) 目標函數列 objective Z-row

(1) constraint column

$$\left(\begin{array}{c} \text{Constraint column} \\ \text{in iteration } i \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Inverse in} \\ \text{iteration } i \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{original} \\ \text{constraint column} \end{array} \right)$$

以 4.2-1 為例，並以 Optimal Tableau of the Primal
of Example 4.2-1

$$\text{optimal inverse} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$(X_1 \text{ column in optimal iteration}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

以相同方式計算

$$(X_2 \text{ column in optimal iteration}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(X_3 \text{ column in optimal iteration}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{Right hand side column in} \\ \text{optimal iteration} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{26}{5} \end{bmatrix}$$

(2) objective Z-row

$$\left(\begin{array}{c} \text{Primal Z-equation} \\ \text{coefficient of variables} \\ X_j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Left-hand side} \\ \text{of corresponding} \\ \text{jth dual constraint} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Right-hand side} \\ \text{of} \\ \text{jth dual constraint} \end{array} \right)$$

$(y_1, y_2) = (\frac{29}{5}, \frac{2}{5})$ 由 4.2-1 而來

$$Z \text{ coefficient of } x_1 = y_1 + 2y_2 - 5 = \frac{29}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} - 5 = 0$$

$$Z \text{ coefficient of } x_2 = 2y_1 - y_2 - 12 = 2 \cdot \frac{29}{5} - (\frac{2}{5}) - 12 = 0$$

$$Z \text{ coefficient of } x_3 = y_1 + 3y_2 - 4 = \frac{29}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5} - 4 = \frac{3}{5}$$

$$Z \text{ coefficient of } x_4 = y_1 - 0 = \frac{29}{5} - 0 = \frac{29}{5}$$

$$Z \text{ coefficient of } R = y_2 - (-M) = \frac{2}{5} + M$$

4.3 Economic Interpretation of Duality 對偶問題之經濟詮釋

金葉生產電阻 (resistor) 及顯示器 (LCD) 兩種產品，科學用與商用計算機。

科學用計算機使用 3 個 resistor 和 1 個 LCD。

商用計算機使用 1 個 resistor 和 4 個 LCD。

兩種產品每月供給量分別為 600 個及 400 個

科學用計算機每個利潤 8 元。商用計算機每個利潤 6 元，試問產品組合使利

潤最大。

令 x_1 : 科學用計算機數量
 x_2 : 商用計算機數量

賣方心態

	科學用 x_1	商用 x_2
resistor	3	1
LCD	1	4
Profit	8	6

at most
 600 y_1
 400 y_2

$$\text{Max } Z = 8x_1 + 6x_2 \quad \text{Min } W = 600y_1 + 400y_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 + x_2 \leq 600$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 400$$

$$\text{s.t.} \quad 3y_1 + y_2 \geq 8$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

假設買方願意買金葉公司全部產品，以自行組裝計算機，則雙方如何決定 resistor 及 LCD 之成交價？

令 y_1 : resistor 之單價 $\Rightarrow$ dual price or shadow price

y_2 : LCD 之單價 對偶價格 影子價格

買方當然希望物美價廉，且不超過 resistor 及 LCD 總產能

$$\text{Min } W = 600y_1 + 400y_2$$

買方要求便宜，賣方也要有利潤才會成交。

$$3y_1 + y_2 \geq 8$$

$$y_1 + 4y_2 \geq 6$$

其中 8 與 6 分別為科學用與商用計算機之每單位利潤。另 $y_1, y_2 \geq 0$ ，因為單價必為正數。

LP 問題可視資源分配模式，其目標，為求收益及利潤最大化，受限於有限資源。由這觀點看問題，伴隨 LP 的對偶問題，可以提供資源分配的經濟詮釋。

考慮, Primal	Dual
$\begin{aligned} \text{Max } z &= \sum_{j=1}^n C_j x_j \\ \text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\leq b_i \quad i=1, \dots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{Min } w &= \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq C_j \quad j=1, \dots, n \\ y_i &\geq 0 \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$

原始問題有 n 個經濟活動(變數) m 種資源(限制式)。係數 C_j 代表活動 j 每單位利潤。 b_i 是資源 i 最大可供給量。資源 i 以 a_{ij} 單位的速度消耗，相對於活動 j 。

4.3.1 對偶變數的經濟詮釋。
在 4.2.3 描述過

$$z = \sum_{j=1}^n C_j x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i = w$$

等號成立於最佳解。

將原始問題當成一資源分配模式， Z 代表收益， b_i 代表資源 i 可供使用的單位數目。

既然

$$Z = \sum_{i=1}^m b_i y_i = W$$

$$\text{收益} = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \sum_{i=1}^m (\text{資源 } i \text{ 之單位數目}) \times$$

(每單位資源 i 的價值)

所以對偶變數 y_i ，代表每單位資源 i 的價值。
對偶變數通常被稱為 dual prices 對偶價格
或 shadow prices 影子價格。

再者，考慮

$$Z < W \quad (\text{for any two feasible primal and dual solution})$$

如同

收益 < 資源的價值

在這種情形下，對應到的原始與對偶問題不是最佳解。因為當收益小於資源價值時，會繼續使用資源，使收益增加，直到收益等於資源價值為止。

Example 4.3-1 以 Reddy Mikks model 為例

Primal	Dual
$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 5x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t. } 6x_1 + 4x_2 &\leq 24 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$ ∴ optimal solution $x_1 = 3, x_2 = 1.5 \quad Z = 21$	$\begin{aligned} \text{Min } w &= 24y_1 + 6y_2 + y_3 + 2y_4 \\ \text{s.t. } 6y_1 + y_2 - y_3 &\geq 5 \\ 4y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\geq 4 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$ optimal solution $y_1 = 0.75, y_2 = 0.5, y_3 = y_4 = 0, w = 21$

由對偶問題的解可以得知 $y_1 = 0.75$
 $y_2 = 0.5$ 代表原問題原料 1 之每單位價值(機會成本)為 0.75, 原料 2 之每單位價值為 0.5, 如第三章描述這些數值在某些範圍內成立(敏感度分析)。

$y_3 = y_4 = 0$ 代表資源 3 與資源 4 (市場與需求限制) 資源是充足的, 在決定最佳解是不重要, 所以 dual price or 每單位價值 worth per unit 為 0.

4.3.2 對偶限制式之經濟詮釋

對偶限制式之經濟詮釋，可使用 4.2.4 節，在任一次運行中

$$\begin{aligned} \text{objective coefficient of } x_j &= (\text{Left hand side of}) - (\text{Right hand side of}) \\ &= \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - C_j \end{aligned}$$

C_j 代表活動 j 每單位收益

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 與 $-C_j$ 有相反的符號，則

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 這數量代表成本。

$$\text{成本} = \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m \left(\begin{array}{c} \text{資源 } i \text{ 使用量} \\ \text{每單位活動 } j \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{每單位資源 } i \text{ 之 imputed cost} \\ \text{源 } i \text{ 之成本} \end{array} \right)$$

y_i 在文獻中每單位資源 i 之 imputed cost 歸屬成本，我們可將 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i$ 這數量想成需要產生一單位活動 j 之所需使用所有資源之歸屬成本。如 3.6 所述 $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - C_j$ 為活動 j 之 reduced cost.

在最大化問題，最佳條件 (Simplex Method)
增加沒有被使用 (非基本) 活動 j ，可以
改進收益，只有在目標係數

$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - C_j$ 是負的，也就是說

$$\left(\text{活動 } j \text{ 每單} \right) < \left(\text{活動 } j \text{ 每單位收益} \right)$$

Example 4.3-2

TOYCO 組裝三種玩具，火車，卡車及汽車
可供組裝三種作業的時間分別為
430, 460 和 420 分鐘，三種玩具的利潤
分別為 3, 2, 5 元，組裝玩具之各種
作業時間如下：

	火車	卡車	汽車
作業 1	1	2	1
作業 2	3	0	2
作業 3	1	4	0

令 x_1, x_2, x_3 分別代表火車，卡車，汽車
之組裝數目，則 LP 與其對偶問題如下：

Primal

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 460$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

optimal solution:

$$x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, Z = 1350$$

Dual

$$\text{Min } w = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$$

s.t.

$$y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$$

$$2y_1 + 4y_3 \geq 2$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Optimal solution:

$$y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = 1350$$

由原始問題而得的最佳解，生產卡車100輛，汽車230輛，火車0輛，代表依據目前的經濟規模，玩具火車是沒有利潤的。由於競爭使得 TOYCO 也要生產火車，以 $z_1 - c_1$ 詮釋 x_1 ， x_1 會有吸引力，唯有在 $z_1 < c_1$ ，TOYCO 可增加收益，藉著升高每單位售價或減少使用資源的歸屬成本（ $= y_1 + 3y_2 + y_3$ ）。增加每單位售價以提高收益不太可能，因為提高價格會影響競爭力。

減低歸屬成本 ($y_1 + 3y_2 + y_3$) 似乎更可行
因為它使組裝作業改善, 藉由減少
每單位作業時間, 令 r_1, r_2, r_3 代表
三種作業時間減少之比率, 我們
希望決定 r_1, r_2, r_3 會使得新的歸
屬成本 (三種作業) 低於單位利潤 C_1
也就是 $(1-r_1)y_1 + 3(1-r_2)y_2 + (1-r_3)y_3 < 3$.

在給定 optimal $y_1=1, y_2=2, y_3=0$ 情況下.

$$y_1 - r_1 y_1 + 3y_2 - 3r_2 y_2 < 3$$

$$\Rightarrow 1 - r_1 + 6 - 6r_2 < 3$$

$$\Rightarrow r_1 + 6r_2 > 4$$

於是在任何 $0, 1$ 間的 r_1, r_2 且滿足

$r_1 + 6r_2 > 4$, 會使生產玩具火車有利潤.

但這一目標未必可以達成, 例如

$$r_1 = r_2 = 0.5 \quad 0.5 + 6 \cdot 0.5 = 3.5 < 4, \text{ 實務}$$

上 50% 減少在作業時間也未必可達成。

4.4 其他的單形法

第3章介紹原始單形法，由可行解開始，不斷改善直到達到最佳解，本節再

介紹兩種演算法，Dual Simplex Method

對偶單形法與 generalized simplex method.

一般化單形法。對偶單形法由

不可行解開始，直到達成可行解，

一開始之解雖為不可行但其解

優於最佳解。一般化單形法線

合原始與對偶單形法，由不可行

與，非最佳開始。

4.4.1 對偶單形法

前面介紹過 LP 問題，不易找出起初可行解 (starting basic solution)，所以加入人工變數，以大 M 法求解。Dual Simplex 無需加入人工變數，可直接求解。

對偶單形法與原始單形法不同，其由不可行解開始，當解達到可行時，即為最佳解。其求解步驟如下：

step 1. 化成所有 surplus variables 有 +1 係數
slack

$$\begin{array}{ll} \min Z = 3x_1 + 2x_2 & \min Z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} & \text{s.t.} \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 & 3x_1 + x_2 - x_3 = 3 \quad \text{--- ①} \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 & 4x_1 + 3x_2 - x_4 = 6 \quad \text{--- ②} \\ x_1 + x_2 \leq 3 & x_1 + x_2 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

將 ① ② 式同乘 $\times (-1)$

$$\begin{array}{ll} \min Z = 3x_1 + 2x_2 & \\ \text{s.t.} & \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -3 & \\ -4x_1 - 3x_2 + x_4 = -6 & \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3 & \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & \end{array}$$

$$\text{令 } NBV = \{x_1, x_2\} = \{0, 0\}.$$

$$BV = \{x_3, x_4, x_5\} = \{-3, -6, 3\} \text{ 非可行.}$$

BASIC	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
Z	-3	-2	0	0	0	0
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
$x_4 \Rightarrow$ 離去	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	1	0	0	1	3

step 2, 選 - 離去變數, 從 BASIC VARIABLE

中選 - 離去可行解最遠的 (RHS 下方)。

上例中, -3, -6, 3, 選擇 -6, 所以

x_4 離去。

step 3 由 NBV 中選 - 進入變數,

其判斷標準是以 Z-equation 中非基本變數, 除以離去變數

equation 中之係數, 滿足 $\alpha_{ij} < 0$,

$\min_{\text{nonbasic } x_j} \left\{ \left| \frac{\bar{c}_j}{\alpha_{ij}} \right|, \alpha_{ij} < 0 \right\}$, 選最小值

e.g.

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ Z & -3 \quad -2 \\ x_4 & -4 \quad -3 \end{array}$$

$$\left| \frac{-3}{-4} \right| > \left| \frac{-2}{-3} \right| \quad \therefore x_2 \text{ 進入變數}$$

進入

BASIC	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
Z	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	4
x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	1

← 離去

$$x_1 = \left| \frac{-\frac{1}{3}}{-\frac{5}{3}} \right| = \frac{1}{5} \quad x_4 = \left| \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}} \right| = 2 \quad x_1 \text{ 進入}$$

BASIC	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Solution
Z	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{21}{5}$
x_1	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{4}{5}$

RHS 下方所有 BASIC 變數之解均為正 (可行), 停止, feasible 並且是 optimal!

4.4.2 一般化單形法

如果 LP 模式一開始不可行且非最佳化，則可用一般化單形法處理，首先使用 dual simplex method 將不可行去掉，當可行之後，再以 primal simplex method 求解得到最佳解。

Example 4.4-2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
BASIC							
Z	0	0	-2	0	0	0	0
x_4	1	-2	2	1	0	0	-8 ← 離去
x_5	-1	-1	1	0	1	0	4
x_6	2	-1	4	0	0	1	10

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
BASIC							
Z	0	0	-2	0	0	0	0
x_2	$\frac{1}{2}$	1	-1	$-\frac{1}{2}$	0	0	4 ← 已離去
x_5	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{1}{2}$	1	0	0 ← 離去
x_6	$\frac{3}{2}$	0	3	$\frac{1}{2}$	0	1	14 ← 離去

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
BASIC							
Z	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0
x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	4
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0
x_6	$\frac{9}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	1	14 ← 離去

Primal 求解

BASIC	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
Z	0	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	7
x_2	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{26}{3}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{14}{9}$
x_1	1	0	0	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{56}{9}$

4.5 POST-OPTIMAL ANALYSIS

在 3.6 介紹過最佳解之敏感度分析，決定係數變動範圍可以維持最佳基本變數不變。本節介紹改變係數，並找到新的最佳解。

下表列出一些在 post-optimal analysis 的情境與所需採用的行動以便獲得最佳解

Condition after parameters change	Recommended action
Current solution remains optimal and feasible.	No further action is necessary.
Current solution becomes infeasible.	Use dual simplex to recover feasibility.
Current solution becomes nonoptimal.	Use primal simplex to recover optimality.
Current solution becomes both nonoptimal and infeasible.	Use the generalized simplex method to recover optimality and feasibility.

Example 4.3-2 TOYCO model 將用來說明上不同情境。

TOYCO primal		TOYCO dual	
Maximize $z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ subject to $x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430$ (Operation 1) $3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 460$ (Operation 2) $x_1 + 4x_2 \leq 420$ (Operation 3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$		Minimize $z = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3$ subject to $y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 3$ $2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 2$ $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	
Optimal solution: $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230, z = \1350		Optimal solution: $y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 0, w = \1350	

The associated optimum tableau for the primal is given as

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	4	0	0	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	20

4.5.1 Changes Affecting Feasibility 變動影响

可行性

變動 RHS 係數與增加一限制式會影響目前最佳解之可行性，上述兩情境目前基本變數會成為負的因而變成不可行。

Changes in the right-hand side 變動 RHS. 這項改變需要表格中 RHS 因此要使用 Section 4.2.4 的公式

Example 4.5-1

情境 1. 假設 TOYCO 增加作業 1, 2, 3 之每日產能至 600, 640, 590 分鐘. 這會對總收益產生何種影響? 改變 RHS 係數只會影響最佳表格中

RHS.

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 640 \\ 590 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 \\ 320 \\ 30 \end{bmatrix}$$

目前基本變數保持可行, 但新解變成 140, 320, 30 且最佳收益為 1880.

情境 2. 假設產能改為 450, 460, 400 分鐘, 總收益為何?

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 450 \\ 460 \\ 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 230 \\ -40 \end{bmatrix}$$

目前解. $x_6 = -40$ 為不可行, 需使用

dual simplex 使其恢復可行。

進入

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	4	0	0	1	2	0	1370
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	110
x_3	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	230
x_6	2	0	0	$\textcircled{-2}$	1	1	-40

← 離去

得到 optimal solution 如下:

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
z	5	0	0	0	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	1350
x_2	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	$\frac{1}{4}$	100
x_3	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	230
x_4	-1	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	20

得到與原來相同之 x_1, x_2, x_3

與, $z = 1350$, 代表提議之產能

改為 450, 460, 400 並不會產生

有利之結果。

Addition of a new constraint 增加一新限制式
 增加新限制式會有兩種情形, 一是
 限制式是多餘的, 則對目標函數
 值沒有改善, 二是目前解無法滿足
 限制式, 則要用 dual simplex method
 重新求解。

Example 4.5-2

情境 1 假設 TOYCO 改變玩具設計，需要第四項組裝作業，這項作業每日產能是 500 分鐘，對三項產品所需之單位時間分別為 3, 1, 1 分鐘，

$$3x_1 + x_2 + x_3 \leq 500$$

這限制式是多餘的，因 $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 230$ 代入限制式滿足，所以目前最佳解不變。

情境 2. 對三項產品所需單位時間改成
3. 3. 1 分鐘.

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 500$$

限制式被違反，將限制式加入表格重新求解.

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solution
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	100
x_3	$\frac{2}{3}$	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	3	3	1	0	0	0	1	500

其中 x_7 是 slack variable

新的表格如下:

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	Solution
z	4	0	0	1	2	0	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0	230
x_6	2	0	0	-2	1	1	0	20
x_7	$\frac{9}{4}$	0	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	1	-30

再以 dual simplex 求解, 會得到 $x_1=0$,

$x_2=90$, $x_3=230$, $z=1330$ (自行驗證)

顯示, 作業四, 使收益由 1350 降低至 1330.

4.5.2 Changes Affecting Optimality 變動影響 最佳解.

本節介紹改變目標函數係數與增加新活動(變數).

Changes in the objective function coefficients.

目標函數係數之改變只會影響 z -列的係數. 如果 z -列的係數滿足最佳解之條件, 最佳解維持不變, 但 z 值會改變, 如果 z -列

係數違反最佳解之條件，使用 primal simplex Method，使其達到最佳解。

Example 4.5-3

情境 1. 假設 TOYCO 有一新價格策略因應競爭，每單位收益改為 \$2, \$3, \$4 (火車, 卡車, 車), 則新的目標函數為

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

於是 $(x_2, x_3, x_6) = (3, 4, 0)$

使用 Section 4.2.3 方法 1, 計算對偶變數

$$(y_1, y_2, y_3) = (3, 4, 0) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0 \right]$$

使用 Section 4.2.4 (2) 計算 Z-row coefficients

$$x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 2 = \frac{3}{2} + 3\left(\frac{5}{4}\right) + 0 - 2 = \frac{13}{4}$$

$$x_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$x_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

滿足最佳解條件，最佳解維持不變

$x_1=0$, $x_2=100$, $x_3=230$ 但 Z 值為 1220
導致更低之收益, 不建議此策略。
情境 2 假設目標函數改成

$$\text{Maximize } Z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

則 $(y_1, y_2, y_3) = [3, 4, 0] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & & & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & & & \\ -2 & 1 & 1 & & & \end{array} \right] = [\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0]$

Z 列的係數

$$x_1 = y_1 + 3y_2 + y_3 - 6 = \frac{3}{2} + 3(\frac{5}{4}) + 0 - 6 = -\frac{3}{4}$$

$$x_4 = y_1 - 0 = \frac{3}{2}$$

$$x_5 = y_2 - 0 = \frac{5}{4}$$

未滿足最佳解條件, 再以 Primal Simplex 求解

進入

Basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	Solution
Z	$-\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	0	1220
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	②	0	0	-2	1	1	20

離去 $\Rightarrow$

得出 optimal solution $x_1=10$, $x_2=102.5$,

$x_3=215$ 和 $Z=1227.5$

給定 $(y_1, y_2, y_3) = (1, 2, 0)$

$$\text{Reduced cost of } x_7 = y_1 + y_2 + 2y_3 - 4 = 1 + 2 - 4 = -1$$

結果顯示，包含 x_7 是有利潤的。要得到

新的最佳解。要先計算 column constraint

使用 Section 4.2.4 公式

$$x_7 - \text{column constraint} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

所以目前的 simplex tableau 可修改如下：

進入

Basic	x_1	x_2	x_3	x_7	x_4	x_5	x_6	Solution
z	4	0	0	-1	1	2	0	1350
x_2	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	100
x_3	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	230
x_6	2	0	0	1	-2	1	1	20

離去

重新求解，可得最佳解為 $x_1=0, x_2=0$

$$x_3=125, x_7=210 \quad Z=1465, \text{ 相較於原,}$$

來，改進並增加收益 \$115。

Addition of a new activity.

增加一新活動，如同加入一新的變數進入模式。直覺上只會存在有利潤的情況才會增加新活動。這項條件可借由 Section 4.2.4 的公式計算新變數的 reduced cost，如果滿足最佳條件則不會改善 z 值，相反地，則會增加收益。

Example 4.5-4

TOYCO 瞭解到因為玩具火車沒有利潤所以目前沒有生產，公司希望以新產品消防車取代，並以目前生產線組裝，公司估計每輛消防車之利潤 \$4，在作業 1, 2, 3 之組裝時間分別為 1, 1, 2 分鐘。令 x_7 代表新的消防車產品。