

Chapter 2 Introduction to Linear Programming

2.1 緒論

Linear Programming 是一種數學模式，來研究如何在有限的人力、物力、資源及市場下，使整體規劃可以獲得最大之成效。

LP 已經成為廣泛應用的 OR 技巧，最主要原因是 LP 可以描述許多實際生活的問題和現存有許多電腦軟體可供應用。課本提供的 TORA 無法解大型問題，專業軟體有 LINDO, OSL, CPLEX 等。

2.1 建構 LP 模式 (TWO-VARIABLE LP MODEL)

Reddy Mikks 生產內部與外部油漆，而製造油漆必須使用 M1 和 M2 兩種原料，第一種 M1 原料每天最多只有辦法取得 24 Tons M2 原料，每天最多只有辦法取得 6 Tons 生產油漆所需之原料組合及利潤如下：

	外部漆	內部漆	每日可取得噸數
M1	6	4	24
M2	1	2	6
Profit per ton (千元)	5	4	

市場調查顯示，內部漆需求每天不會超過 2 Tons
內部漆之需求不得超過外部漆 1 Ton, Reddy
Mikks 希望決定每日應生產多少噸內部漆
與外部漆，使得每日利潤最大。

LP 包含三部分 Decision Variables, Objective function,
Constraints

Decision Variables 決策變數：通常是一問題要決定的

x_1 ：每天所生產的外部漆噸數

x_2 ：每天所生產的內部漆噸數

Objective Function 目標函數：通常是利潤最大化或
成本最小化。生產外部漆每噸利潤 5000 元，生
產內部漆每噸利潤 4000 元，令 Z 代表總銷售
利潤 Maximize $Z = 5x_1 + 4x_2$

Constraints 限制式 在這問題有三種限制式，原料
使用限制式，市調限制式，非負限制式

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{完整 LP 可寫成}$$

$$\text{Maximize } Z = 5x_1 + 4x_2$$

s.t.

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_2 \leq 2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

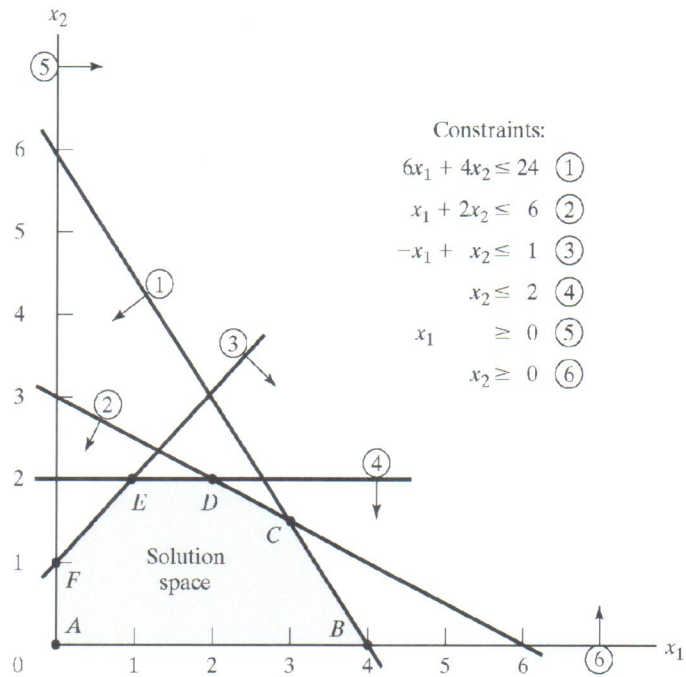


Figure 2.1
Feasible space of the Reddy Mikks model.

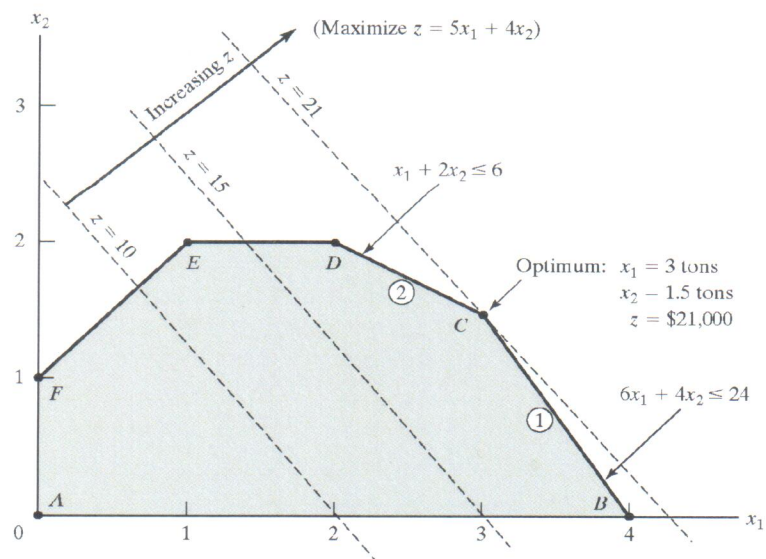


Figure 2.2
Optimum solution of the Reddy Mikks model.

LP 假設下列特性

1. 比例性假設: Proportionality Assumption

$$\text{Maximize } Z = 5X_1 + 4X_2$$

$$X_1 = 1 \quad \text{profit } 5$$

$$X_1 = 2 \quad \text{profit } 10$$

$$X_1 = 3 \quad \text{profit } 15$$

但現實例如 20 Tons

以上會要求折扣。

利潤變成 4.8,

此時不再有線性關係, modeling 時要注意。

2. 加法性假設: Additivity Assumption

X_1 - 單位都貢獻 5000 元, 不管 X_2 是什麼值。
反之亦然, X_2 - 單位都貢獻 4000 元, 不管 X_1 為何。
也就是 X_1 與 X_2 之間沒有交互影響。例
如 $\text{Maximize } Z = 5X_1 + 4X_2$, X_1 與 X_2 之間則產
生交互影響, 此例為 NLP。

3. 可除性假設: Divisibility Assumption

允許 X_1 與 X_2 是一分數或小数值的值。

例如 $X_1 = 4.25 \text{ Tons}$ $X_2 = 3.75 \text{ Tons}$ 。有
些問題決策變數不允許是分數的值。
例如 X_1 代表需要的人數, 人必需是整數,
 X_1 為 ≥ 0 正整數, 此例為 IP。

4. 確定性假設: Certainty Assumption

每一目標函數中之係數, 限制式,
RHS 之係數均為已知。

(飲食問題) Ozark 農場每天至少使用 800 磅的特別飼料，這種飼料由玉米與黃豆混合而成，其組成成本與成份如下：

	每磅的飼料		成本(\$/lb)
	蛋白質	纖維	
玉米	0.09	0.02	0.3
黃豆	0.6	0.06	0.9

飼料需要至少 30% 的蛋白質與纖維不可以超過 5%。Ozark 農場希望決定玉米與黃豆之組合，使成本最小。

Decision variables: x_1 : 玉米在混合飼料中的磅數
 x_2 : 黃豆在混合飼料中的磅數

Objective function: 令 Z = 每日總成本

$$Z = 0.3x_1 + 0.9x_2$$

Constraints : $x_1 + x_2 \geq 800$

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

LP

Minimize $Z = 0.3x_1 + 0.9x_2$

st. $x_1 + x_2 \geq 800$

$$0.09x_1 + 0.6x_2 \geq 0.3(x_1 + x_2)$$

$$0.02x_1 + 0.06x_2 \leq 0.05(x_1 + x_2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

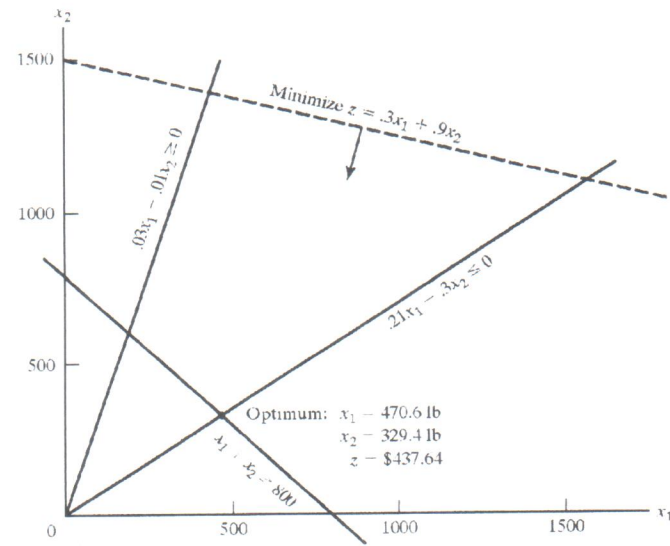


Figure 2.3
Graphical solution of the diet model.

(銀行貸款) - 財務機構 Thriftem 銀行正在建立 - 12 million 的貸款政策, 銀行有義務對不同顧客提供貸款, 下表為不同顧客之利率與壞帳率

類型	利率	壞帳機率
個人	0.14	0.1
汽車	0.13	0.07
房屋	0.12	0.03
農場	0.125	0.05
商業	0.1	0.02

為了與其他機構競爭必須將至少 40% 資金分配至農場與商業貸款。為了協助發展地區房產事業, 房屋貸款至少是個人、汽車、房屋貸款的 50%。所有貸款之壞帳比率不得超過 0.04。 x_1 : 個人貸款金額 x_2 : 汽車貸款金額 x_3 : 房屋貸款金額 x_4 : 農場貸款金額 x_5 : 商業貸款

$$\text{Maximize } Z = 0.14(0.9x_1) + 0.13(0.93x_2) + 0.12(0.97x_3) + 0.125(0.95x_4) + 0.1(0.98x_5) - 0.1x_1 - 0.07x_2 - 0.03x_3 - 0.05x_4 - 0.02x_5$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 12$$

$$x_4 + x_5 \geq 0.4 \times 12$$

$$x_3 \geq 0.5(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\frac{0.1x_1 + 0.07x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.02x_5}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} \leq 0.04$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

都市更新模式 (Urban Renewal Model)

Erstville 面臨嚴重預算缺口為尋求長期解決之道，市議會決定改善稅基藉由徵用內部城市住宅區域將其替代為現代化發展。

計劃包含兩階段 (1) 拆除不合標準房子以提供土地 (2) 建築新建設。相關訊息如下。

1. 共有 300 間不合標準房子可拆除，每間房子佔 0.25 acre，每間房子拆除成本 \$2000。
2. 單戶、雙戶、參戶、肆戶房子的土地需求分別為 0.18, 0.28, 0.4 與 0.5 acre。
3. 街道、開放空間與設施需佔所有土地的 15%，參戶與肆戶房子至少需佔所有戶數 25%，單戶與雙戶分別至少需佔所有戶數的 20% 與 10%。
4. 由單戶、雙戶、參戶與肆戶課得的稅收分別為 \$1000, \$1900, \$2700 與 \$3400，其建築成本分別為 \$50,000, \$70,000, \$130,000 與 \$160,000，透過地方銀行貸款最多為 \$15 million。

各類房屋應建多少戶以達到稅收最大化？

Decision variables

x_1 : 單戶的棟目 x_2 : 雙戶的棟目

x_3 : 叁戶的棟目 x_4 : 肆戶的棟目

x_5 : 必須被拆除的舊房屋棟目.

Maximize $Z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$
s.t.

$$0.18x_1 + 0.28x_2 + 0.4x_3 + 0.5x_4 \leq (0.85)(0.25x_5)$$

$$x_5 \leq 300$$

$$x_1 \geq 0.1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_2 \geq 0.2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$x_3 + x_4 \geq 0.25(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$50x_1 + 70x_2 + 130x_3 + 160x_4 + 2x_5 \leq 15000 (\text{仟元})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \text{ 整數}$$

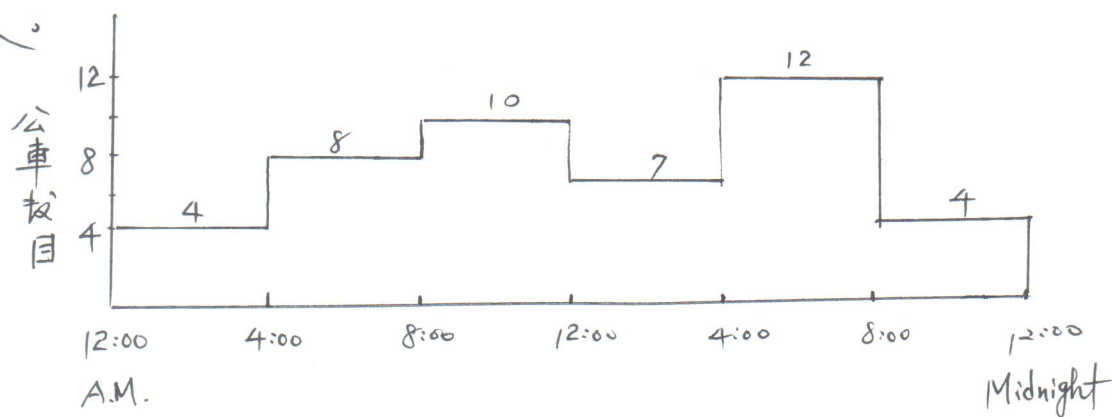
以軟體求解

$$x_1 = 36 \quad x_2 = 98 \quad x_3 = 45 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 245$$

$$Z = 343,700$$

(公車排班問題)

城市正在考慮大眾運輸系統，以便舒解空氣污染問題。一開始是為了決定最少公車數目並且滿足交通需求，經過蒐集資料後發現，每天各時段需求是變動的，更進一步分析公車需求數目在每4小時內可視為常數。



每輛公車每天只可連續營運 8 hrs.

決策變數

- x_1 : 在 12:01 a.m. 開始的公車數目
- x_2 : 在 4:01 a.m. 開始的公車數目
- x_3 : 在 8:01 a.m. 開始的公車數目
- x_4 : 在 12:01 p.m. 開始的公車數目
- x_5 : 在 4:01 p.m. 開始的公車數目
- x_6 : 在 8:01 p.m. 開始的公車數目

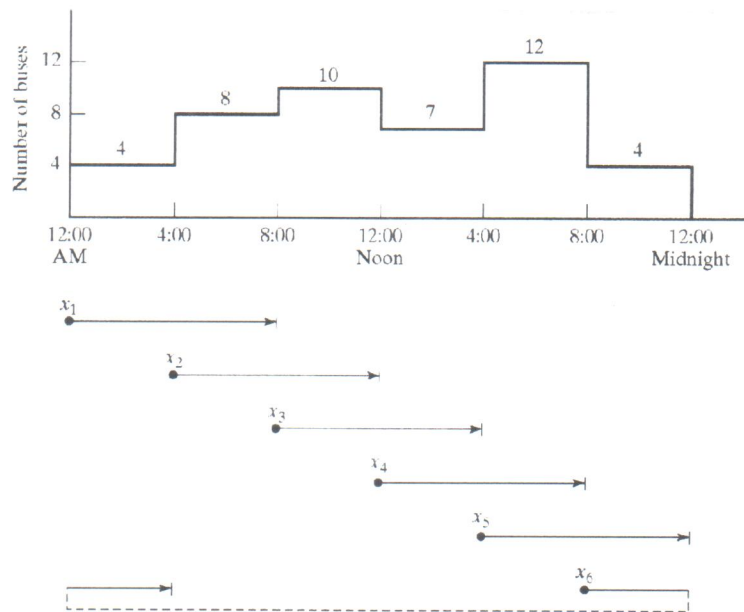


Figure 2.8
Number of buses as a function of the time of the day.

$$\text{Minimize } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

st.

$$x_1 + x_6 \geq 4$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$x_2 + x_3 \geq 10$$

$$x_3 + x_4 \geq 7$$

$$x_4 + x_5 \geq 12$$

$$x_5 + x_6 \geq 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \text{ 整數}$$

以電腦軟體求解可得

$$x_1 = 4, x_2 = 10, x_3 = 0, x_4 = 8, x_5 = 4, x_6 = 0$$

(剪裁損失問題) 太平洋紙業公司生產寬 20 ft 的標準紙卷，顧客如有不同寬度之需求則以裁剪標準紙卷產生。典型之訂購摘要如下表。

訂購	需要寬度 ft	需要卷數
1	5	150
2	7	200
3	9	300

實務上訂單的滿足是裁剪合於需求的寬度，下圖顯示，三種不同可能的裁切的寬度，

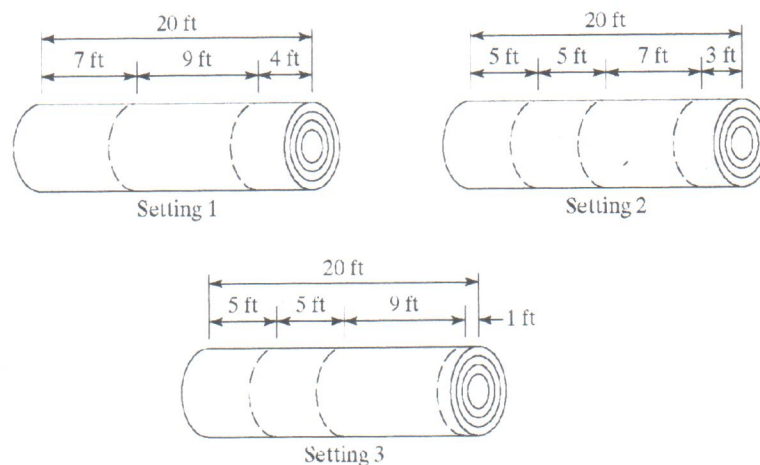


Figure 2.9
Trim loss (shaded) for knife settings 1, 2, and 3.

我們可依上述任何不同組合滿足需求
下面是兩種可行解的組合

1. 用 Setting 1 剪 300 卷 和 用 Setting 2 剪 75 卷.
2. 用 Setting 1 剪 200 卷 和 用 Setting 3 剪 100 卷.

上述兩種組合,何者較佳? 我們可以剪裁損失 (trim loss) 回答這一問題.

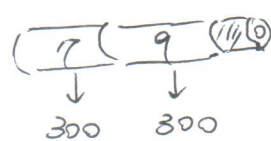
我們將剪裁損失分成兩種 (1) 剪裁過多可以放著下次使用 (例如寬度為 5, 7, 9 ft), (2) 下次無法使用, 我們稱為直接損失.

首先考慮, 組合 1.

直接損失為 $300 \times 4 \times L + 75 \times 3 \times L$

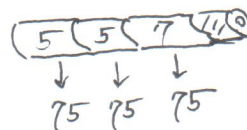
$= 1425 L \text{ ft}^2$, 其中 L 為標準紙卷長度

多裁剪損失為



裁出

5 ft 150 卷
7 ft 375 卷
9 ft 300 卷



需求

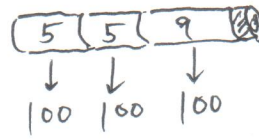
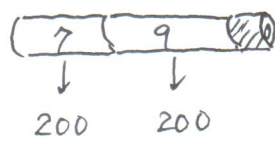
150 卷
200 卷 $\rightarrow 175 \times 7 \times L \text{ ft}^2$
300 卷 $= 1225 L \text{ ft}^2$

所有裁剪損失 $1425 + 1225 = 2650 L \text{ ft}^2$

組合 2

直接損失為 $200 \times 4 \times L + 100 \times 1 \times L = 900 L \text{ ft}^2$

多裁損失為



裁出

需求

5ft 200 卷
7ft 200 卷
9ft 200 卷

150 卷 $\rightarrow 50 \times 5 \times L$
200 卷 $= 250 L \text{ ft}^2$
300 卷

所有裁剪損失 $900 + 250 = 1150 L \text{ ft}^2$

$\therefore$ 組合 2 較佳，因為它產生較少的裁剪損失

為了得到最佳解，首先必須決定所有可能裁剪，然後找出所有可行的組合。再以 LP 求解。

需要寬度 ft	Setting						訂購卷數
	1	2	3	4	5	6	
5	0	2	2	4	1	0	150
7	1	1	0	0	2	0	200
9	1	0	1	0	0	2	300
裁剪損失	4	3	1	0	1	2	

令 x_j 代表依據 setting j 剪裁的標準卷數
 $j=1, 2, \dots, 6$ 只有 6 種版樣

所有裁剪損失是所有標準卷數(使用到面積)和所有訂購之間的差異。已設標準卷之長 L , 寬為 20 呎。

$$\begin{aligned} & 20 \times L (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - (5 \times L \times 150 \\ & \quad + 7 \times L \times 200 + 9 \times L \times 300) \\ & = 20L (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 4850L \end{aligned}$$

由於 L 是常數, $20L(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) - 4850L$ 可以減(少)化為

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$2x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 \geq 150$$

$$x_1 + x_2 \quad \quad \quad + 2x_5 \geq 200$$

$$x_1 + \quad \quad \quad + x_3 \quad \quad \quad + 2x_6 \geq 300,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \text{ 整數}$$