

Ch 8 Goal Programming 目標規劃

8.1 單一目標, 對多目標

在前面已介紹 线性規劃(LP)是求單一目標的最佳化。可是存在有些情況, 你可能有多个目標, 希望達成但目標, 間相互衝突, 或是有優先順序。例如, 有抱負的政治家, 承諾降低國家負債, 同時減稅。在這種情況下, 不可能找到一個單一解, 同時滿足衝突的目標。eg. 某公司生產橡膠漆與釉漆, 已知生產 100 gallons 橡膠漆與釉漆, 各需 10 hrs 及 15 hrs。出售每 gallon 均可獲利 1 美元。該公司在不增僱人員及不加班情況下, 每週可工作 40 hrs。總經理希望生產部門達到下列目標: 第一優先目標 (1) 避免加班 (2) 第二目標, 每週獲利 1000 美元 (3) 第三目標, 每週至少生產 700 gallons 釉漆。這是一種有優先順序的目標規劃, 所以不可能找到一個單一解(最適解)同時滿足有衝突的目標。相對的, 我們可能找出一 compromise solution 妥協解(基於相對重要性)。這章目標規劃的技術就

是要解決多目標的問題。主要的構想就是將原來的 多重目標 轉換成一個 單一目標。其所得到的結果，通常稱為有效解 (efficient solution)。因為對所有有衝突的目標而言，它並不一定是最適解 (exact solution)。

8.2 目標規劃的建構

e.g 8.2-1

Fairville 是一小城市有 20,000 居民，市政府委員會正在發展一公正稅率表。不動產年稅基 550 百萬，食物和藥的年稅基 35 百萬，一般銷售年稅基 55 百萬，地方的汽油使用量每年大約 7.5 百萬 gallons。市政府委員會希望發展稅率基於四項主要目標。

1. 稅收至少需要 16 百萬，以滿足市的財務需求
2. 食物和藥的稅收不可超過全部稅收的 10%
3. 一般銷售的稅收不可超過全部稅收的 20%
4. 汽油每 gallon 的稅收不可超過 2 cents.

令 x_p ：分別代表不動產之稅率

x_f ：代表食物與藥之稅率

x_s ：代表一般銷售之稅率

x_g ：代表汽油每 gallon 的稅率以 cent 表示
(modeling 要換成 \$)

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + \frac{7.5}{100}x_g \geq 16 \quad \text{全部稅收}$$

$$3.5x_f \leq 0.1(550x_p + 35x_f + 55x_s + \frac{7.5}{100}x_g) \quad \text{食物稅稅收}$$

$$55x_s \leq 0.2(550x_p + 35x_f + 55x_s + \frac{7.5}{100}x_g) \quad \text{一般稅稅收}$$

$$x_g \leq 2 \quad \text{汽油每 gallon 的稅}$$

$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$

限制式可簡化如下

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.75x_g \geq 16$$

$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.0075x_g \geq 0$$

$$110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.15x_g \geq 0$$

$$x_g \leq 2$$

$$x_p, x_f, x_s, x_g \geq 0$$

每一條不等式代表著市委員會想達成的目標。目標規劃想達成一妥協的解。可藉由加入偏離 (deviation variables) 變數來完成。

$$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.75x_g + S_1^+ - S_1^- = 16$$

$$55x_p - 31.5x_f + 5.5x_s + 0.0075x_g + S_2^+ - S_2^- = 0$$

$$110x_p + 7x_f - 44x_s + 0.15x_g + S_3^+ - S_3^- = 0$$

$$x_g + S_4^+ - S_4^- = 0$$

$$S_i^+, S_i^- \geq 0 \quad i=1, \dots, 4$$

S^+ , S^- 是獨立的, 不可以同時為基本變數, 也就是只有一個正數, 不可以有兩個變數同時為正的數字。

例如 $x_1 + x_2 \geq 30 \Rightarrow x_1 + x_2 + S_1^+ - S_1^- = 30$

假設 $x_1 + x_2 = 35$

$S_1^+ = 0, S_1^- = 5$

$x_1 + x_2 = 25$

$S_1^+ = 5, S_1^- = 0$ 違反原式

$x_1 + x_2 = 30$

$S_1^+ = 0, S_1^- = 0$

如果原來的限制式是 $\leq$ 的型態,

$x_g \leq 2 \Rightarrow x_g + S_4^+ - S_4^- = 2$

假設 $x_g = 1, S_4^+ = 1, S_4^- = 0$

$x_g = 4, S_4^+ = 0, S_4^- = 2$ 違反原式

$x_g = 2, S_4^+ = 0, S_4^- = 0$

同理原限制式是 $\geq$ 的型態,

$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g \geq 16$

$550x_p + 35x_f + 55x_s + 0.075x_g + S_1^+ - S_1^- = 16$

假設其總和為 15

$S_1^+ = 1, S_1^- = 0$ 違反原式

假設其總和為 17

$S_1^+ = 0, S_1^- = 1$ 滿足原式

道理如同以前標準化 LP 時之 slack variable 與 excess variable

例如 $x_1 + x_2 \leq 10$ $x_1 + x_2 + S_1^+ = 10$
 $x_1 + x_2 \geq 10$ $x_1 + x_2 - S_1^- = 10$

p5

滿足	違反
$S_1^+ \geq 0$	$S_1^- > 0$
$S_1^- \geq 0$	$S_1^+ > 0$

利用 S_i^+ , S_i^- 可以讓我們建模時滿足或違反原式，提供了彈性。目標規劃尋求妥協解時，很自然的希望 違反每個目標，越小越好，進而達到妥協。

就上述例子之四個目標而言。

$$\text{Min } G_1 = S_1^+$$

$$\text{Min } G_2 = S_2^+$$

$$\text{Min } G_3 = S_3^+$$

$$\text{Min } G_4 = S_4^-$$

原限制式	滿足	違反
$\geq$	$S_1^- \geq 0$	$S_1^+ > 0$
$\geq$	$S_2^- \geq 0$	$S_2^+ > 0$
$\geq$	$S_3^- \geq 0$	$S_3^+ > 0$
$\leq$	$S_4^+ \geq 0$	$S_4^- > 0$

如何解決上述問題呢？可以 ① 加權的方法
 ② 優先的方法

8.3 目標規劃演算法

8.3.1 加權方法 The Weighting Method

假設目標規劃模式有 n 個目標。第 i 個目標，給定如下 $\text{Min } G_i \quad i=1, \dots, n$

加權方法是使用權重，將 n 個目標組合起來

$$\text{Min } Z = w_1 G_1 + w_2 G_2 + \dots + w_n G_n$$

$w_i, i=1, \dots, n$ 代表第 i 個目標的權重。該權重反映決策者心中認為目標 i 的重要性。

w_i 是一個正數，權重的給予基本上是主觀的。

e.g. 8.3-1

Top Ad 一個新廣告代理商，有10位員工，接到一合約來促銷一項新產品，代理商可透過收音機或 TV 廣告。

每分鐘廣告	Radio	TV
有多少人會接觸到(百萬)	4	8
成本(千元)	8	24
需要人力	1	2

合約禁止使用超過 6 分鐘的 Radio 廣告

Radio + TV 廣告，要至少使 45 百萬人接觸到

廣告預算為 100 千元，人力限制為 10 人

請問應使用多少分鐘在 Radio 及 TV 廣告

令 x_1 和 x_2 代表分配至 Radio 及 TV 之廣告

時間。這個問題可以寫成如下：

$$\text{Min } G_1 = S_1^+$$

$$\text{Min } G_2 = S_2^-$$

st.

$$4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45 \quad \text{接觸人數} \Leftrightarrow 4x_1 + 8x_2 \geq 45$$

$$8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100 \quad \text{預算限制} \Leftrightarrow 8x_1 + 24x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10 \quad \text{人力限制}$$

$$x_1 \leq 6 \quad \text{Radio 限制}$$

$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^- \geq 0$$

假設管理階層認為目標 1 是目標 2 的 2 倍重要，則問題變成

$$\text{Min } Z = 2G_1 + G_2 = 2S_1^+ + S_2^-$$

st.

$$4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45$$

$$8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^- \geq 0$$

使用 LINDO 求解。

得到 $Z=10$ 代表有目標沒有被滿足。

當 $Z=0$ 代表目標均被滿足

$x_1=5$ $x_2=2.5$ $S_1^+=5$ ，其他變數為 0。

$S_1^+=5$ 代表目標 1 沒有被滿足，也就是所達到的聽眾與觀眾少了 5 百萬。

預算目標滿足了 (因為 $S_2^-=0$)。

p8

目標規劃產生的是一有效解，未必是最適解
例如 $x_1=6$ $x_2=2$ 產生相同的目標 1 (接觸到
40 百萬人) 但是成本較低 ($8 \times 6 + 24 \times 2 = 96$ 千元)
所以有一些傳統 OR 的書就沒有將
goal programming 列入。

8.3.2 優先方法 (The Preemptive Method)

決策者先將目標之優先順序由最重要排
至最不important

$$\text{Min } G_1 = \rho_1 \text{ (最優先)}$$

⋮

$$\text{Min } G_n = \rho_n \text{ (最不重要)}$$

$\rho_i, i=1, \dots, n$ 代表 S_i^+ 或 S_i^-

在例子 8.3-1 Top Ad 模式中 $\rho_1 = S_1^+, \rho_2 = S_2^-$

求解步驟是一次解決一個目標，從最優先
順序開始，結束於最低的順序。較低優先
順序的解不會較高優先順序之解 degrade
較差。其求解步驟如下：

步驟 0 辨認模式的目標，並以優先順序列

$$G_1 = \rho_1 > G_2 = \rho_2 > \dots > G_n = \rho_n \quad \text{令 } i=1$$

步驟 1. 解 LP_i 令使 G_i 最小，令 $\rho_i = \rho_i^*$

如果 $i=n$ 則停止; 否則增加限制式 $\rho_i = \rho_i^* P_i$
 至 G_i 問題的限制式, 確保 ρ_i 不會使未來
 的問題 degraded, 令 $i=i+1$, 重覆步驟 i 。

Example 8.3-2

以 Example 8.3-1 為例並假設接觸到聽眾與
 觀眾有較高優先順序

stop 0 $G_1 > G_2$ $G_1: \min Z = S_1^+$ (exposure)
 $G_2: \min Z = S_2^-$ (budget)

step 1 解 LP_1 $\min G_1 = S_1^+$
 st. $4x_1 + 8x_2 + S_1^+ - S_1^- = 45$
 $8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100$
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$
 $x_1 \leq 6$
 $x_1, x_2, S_1^+, S_1^-, S_2^+, S_2^- \geq 0$

以 LINDO 求解得 $S_1^+ = 5$ $x_1 = 5$ $x_2 = 2.5$ 其餘變數為 0, 在
 LP_1 $\rho_i = S_1^+$ 於是在 G_2 問題加入 $S_1^+ = 5$ 限制式。

step 2 解 LP_2 $\min G_2 = S_2^-$
 加入 $S_1^+ = 5$ 簡化 (1) 式如下

$4x_1 + 8x_2 - S_1^- = 40$
 $8x_1 + 24x_2 + S_2^+ - S_2^- = 100$
 $x_1 + 2x_2 \leq 10$
 $x_1 \leq 6$
 $x_1, x_2, S_1^-, S_2^+, S_2^- \geq 0$

以 LINDO 求解 $x_1 = 6$ $x_2 = 2$ $S_1^+ = 5$ $S_1^- = 0$ $S_2^+ = 4$ $S_2^- = 0$

Example 8.3-3

P10

例題 8.3-1 可重新以直接表示,

$$\text{Max } P_1 = 4X_1 + 8X_2$$

$$\text{Min } P_2 = 8X_1 + 24X_2$$

st.

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

首先解這問題以 Example 8.3-2 的方法

step 1. 解 LP₁ $\text{Max } P_1 = 4X_1 + 8X_2$

$$\text{st. } X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

結果 $X_1=0, X_2=5, P_1=40$ 代表最多 40 百萬人可接觸到

step 2. 加入限制式 $4X_1 + 8X_2 \geq 40$ 確保 G_1 不會更糟. 解 LP₂ $\text{Min } P_2 = 8X_1 + 24X_2$

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 6$$

$$(\text{新加入限制式}) 4X_1 + 8X_2 \geq 40$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

結果 $X_1=6, X_2=2, P_2=96$

得到相同之 exposure, 但有較低 cost (與 $X_1=0, X_2=5, P_1=40$ 比較)

使用 column-dropping rule 解決相同問題

P11

LP_1 (exposure maximization)

將兩目標函數放在一起，最佳條件只適用於 P_1 目標函數該列。

BASIC	X_1	X_2 ↓ 進入	S_1	S_2	Solution
Max P_1	-4	-8	0	0	0
Min P_2	-8	-24	0	0	0
S_1	1	2 ↓ 離去	1	0	10
S_2	1	0	0	1	6

	X_1	X_2	S_1	S_2	solution
P_1	0	0	4	0	40
P_2	4	0	12	0	120
X_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	5
S_2	1	0	0	1	6

$X_1 = 0$
 $X_2 = 5$
 $Z = 40$

column-dropping rule 對於非基本變數中 $Z_j - C_j \neq 0$ (i.e. 目標函數中 $\neq 0$) 這 column 去除掉，然後再開始解 LP_2

BASIC	$\downarrow$ X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
P_1					40
Min P_2	4	0		0	120
X_2	$\frac{1}{2}$	1		0	5
S_2	1	0		1	6

BASIC	X_1	X_2	S_1	S_2	Solution
P_1					40
P_2	0	0		-4	96
X_2	0	1		$\frac{1}{2}$	2
X_1	1	0		1	6