

§ Special Cases in Simplex Method

(1) Degeneracy 退化

在 simplex method 計算中有時候會產生兩個以上的離去變數，這表示有兩個以上的極點重疊，這就是退化的情況發生，此時任選一離去變數計算。

e.g.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 4x_2 \leq 8 \text{ (redundant)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

standard form $\text{Max } Z = 3x_1 + 9x_2 + 0s_1 + 0s_2$

$$x_1 + 4x_2 + s_1 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

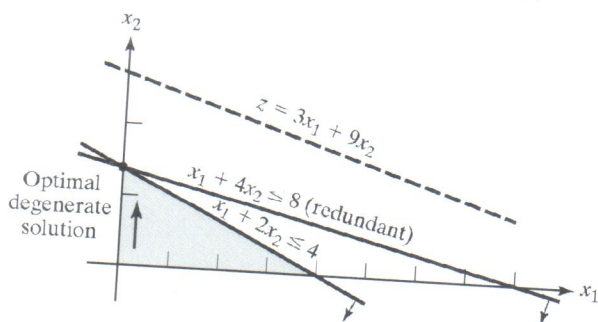


Figure 3.7
LP degeneracy in Example 3.5-1.

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	-3	-9	0	0	0
s_1	0	1	4	1	0	8
s_2	0	1	2	0	1	4

$$\left. \begin{array}{l} \frac{8}{4}=2 \\ \frac{4}{2}=2 \end{array} \right\} \text{tie}$$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{4}$	0	18
x_2	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	2
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	0	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	18
x_2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
x_1	0	1	0	1	2	0

退化解產生之原因為有極點重疊，代表有多餘的限制式，其計算過程會出現二個或二個以上之離去變數，有時 Z 值沒有改善，有 $BV=0$ 。

(2) Alternative Optima 無限多解

當目標函數和 a binding constraint 平行時，稱為 alternative optima 此時就有無限多解。

binding: a constraint is binding if the left hand side and the right-hand side of the constraints are equal if the optimal values of the decision variables are substituted into the constraint.

e.g. $\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2$
 $x_1 + 2x_2 \leq 5$
 $x_1 + x_2 \leq 4$
 $x_1, x_2 \geq 0$

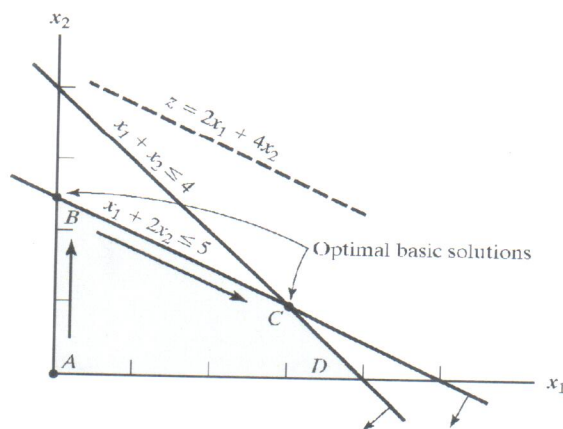


Figure 3.9
LP alternative optima in Example 3.5-2.

用 Simplex method 我們可以找出 B.C 兩點 optimal. 在 BC 所連接的線段上都是 optimal 因為他們斜率相同，有相同的 Z 值

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	
Z	1	-2	-4	0	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	5	$\frac{5}{2} = 2.5$
s_2	0	1	1	0	1	4	$\frac{4}{1} = 4$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	0	0	2	0	10
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
s_2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$

依以前所寫 stop here, $\{x_1, x_2\} = \{0, \frac{5}{2}\}$

我們必須檢驗限制式是否 binding

限制式1 $0 + 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$

限制式2 $0 + \frac{5}{2} < 4$

所以得知限制式 1 binding, 以 x_1 再次進入, 求得另一 optimal solution $\{x_1, x_2\} = \{3, 1\}$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	0	0	2	0	10
x_2	0	0	1	1	-1	1
x_1	0	1	0	-1	2	3

$$B : (0, \frac{5}{2}) \quad \alpha$$

$$C : (3, 1) \quad 1-\alpha$$

$$\hat{x}_1, \hat{x}_2$$

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

一般解

$$\hat{x}_1 = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)3 = 3 - 3\alpha$$

$$\hat{x}_2 = \alpha \cdot \frac{5}{2} + (1-\alpha) \cdot 1 = 1 + \frac{3}{2}\alpha$$

無限多解產生之原因是目標函數與 a binding constraint 平行，計算過程並無特別不同，但需在獲得 optimal solution 後，進一步檢查限制式是否 binding，如果是 binding 再找出另一 optimal solution.

(3) 無界限解 Unbounded Solution

產生因原，是可行解空間不是封閉。
目標方程式可以無限制移動。

e.g.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 \leq 10$$

$$2x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

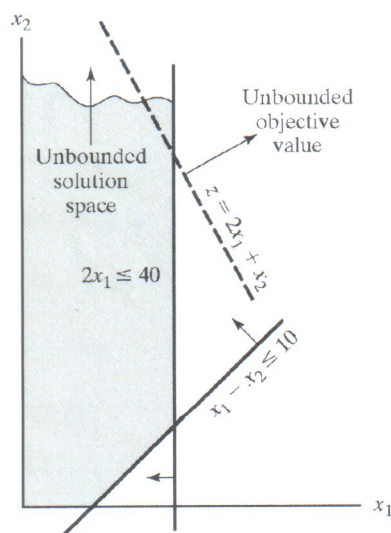


Figure 3.10

LP unbounded solution in Example 3.5-3.

BASIC	Z	^{entering} x_1	x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	-2	-1	0	0	0
s_1	0	①	-1	1	0	10
s_2	0	2	0	0	1	40

$\frac{10}{1} = 10 \text{ min}$
 $\frac{40}{2} = 20$

BASIC	Z	x_1	^{entering} x_2	s_1	s_2	Solution
Z	1	0	-3	2	0	20
x_1	0	1	-1	1	0	10
s_2	0	0	②	-2	1	20

$\frac{20}{2} = 10$

BASIC	Z	x_1	x_2	^{entering} s_1	s_2	Solution
Z	1	0	0	-3	$\frac{3}{2}$	50
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{2}$	20
x_2	0	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	10

當 entering column 的係數均為 0 或負數
 則可判斷 solution space 是 unbounded.

亦可不用經過上述運算, 在一開始
 發現 x_2 下方 -1, 0.

4. 無解 infeasible solution

e.g.
$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 2 \\ 3x_1 + 4x_2 &\geq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

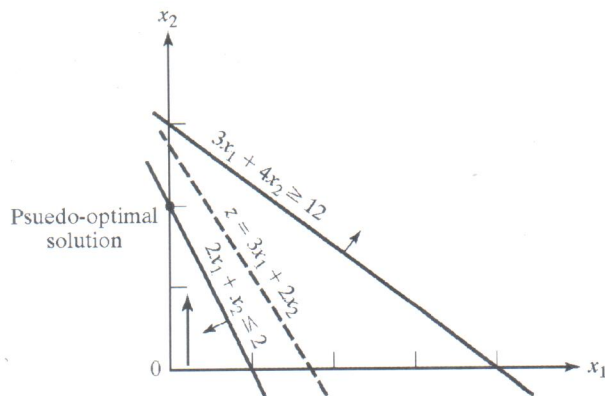


Figure 3.11
Infeasible solution of Example 3.5-4.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 2x_2 - MR$$

$$2x_1 + x_2 + S_1 = 2$$

$$3x_1 + 4x_2 - S_2 + R = 12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, R \geq 0$$

$$n=5 \quad m=2 \quad \text{NBV} = \{x_1, x_2, S_1\} = 0$$

$$R = 12 - 3x_1 - 4x_2 + S_2$$

$$\begin{aligned} Z &= 3x_1 + 2x_2 - M(12 - 3x_1 - 4x_2 + S_2) \\ &= (3 + 3M)x_1 + (2 + 4M)x_2 - MS_2 - 12M \end{aligned}$$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_2	s_1	R	Solution
Z	1	$-3-3M$	$-2-4M$	M	0	0	$-12M$
s_1	0	2	1	0	1	0	2
R	0	3	4	-1	0	1	12

$$\frac{2}{1} = 2 \text{ (min)}$$

$$\frac{12}{4} = 3$$

BASIC	Z	x_1	x_2	s_2	s_1	R	Solution
Z	1	$5M+1$	0	M	$2+4M$	0	$4-4M$
x_2	0	2	1	0	1	0	2
R	0	-5	0	-1	-4	1	4

$R=4$ 未能消去人工變數 R, 此題無解

R is supposed to be equal to zero.

§ 圖形敏感度分析 §

敏感度分析藉由參數的變動，來觀察最佳解的變動情形，其主要目的就是利用最少的額外計算，去獲知可能的新的最佳解，而無需重新計算。

本節分成兩類討論，一是目標函數係數變動，另一類是限制式右邊係數的變動。

1. 目標函數係數的變動

我們希望瞭解目標函數的係數允許多大的變動(範圍)，而最佳解不會改變。

目標函數的一般式

$$\text{Maximize or Minimize } Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

變動係數 C_1 與 C_2 會改變 Z 的斜率

$$\text{令 } Z = 3X_1 + 2X_2$$

$$X_2 = \frac{Z}{2} - \frac{3}{2}X_1$$

$$y = a + bX$$

截距 斜率 = $-\frac{C_1}{C_2}$ ($\frac{X_1}{X_2}$ 係數)

以 Reddy Mikks 為例

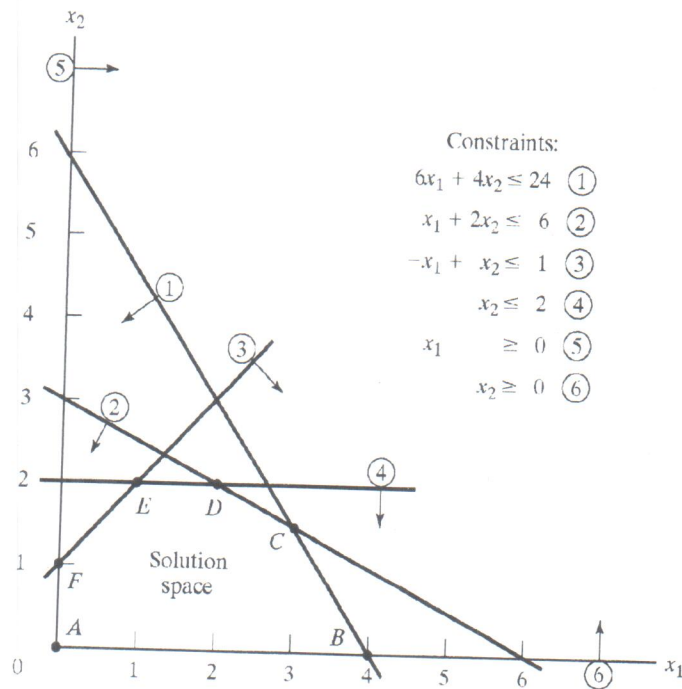


Figure 2.1
Feasible space of the Reddy Mikks model.

C 真是最佳解, $x_1 = 3$, $x_2 = 1.5$ $Z = 5x_1 + 4x_2 = 22.5$

C 真是由 $6x_1 + 4x_2 = 24$ ① 和 $x_1 + 2x_2 = 6$ ②

兩條線交集而得, 所以只要 Z 的斜率保持在 BC 和 CD 之間, 解都還會是 C 真不變。

$$B = (4, 0) \quad C = (3, 1.5) \quad D = (2, 2)$$

$$m = DC = \frac{2 - 1.5}{2 - 3} = \frac{0.5}{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$m = BC = \frac{0 - 1.5}{4 - 3} = \frac{-1.5}{1} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{3}{2} \quad C_2 \neq 0. \text{ (不管負號)}$$

或直接以斜率為 $-\frac{C_1}{C_2}$

$$6x_1 + 4x_2 = 24 \quad m = \frac{-6}{4}$$

$$x_1 + 2x_2 = 6 \quad m = \frac{-1}{2}$$

因為斜率為 $-\frac{C_1}{C_2}$

$C_1 \neq 0$ 目標函數不可以是水平的 $\frac{-0}{C_2} = 0$

$C_2 \neq 0$ 目標函數不可以是垂直的 $\frac{-C_1}{0} = \infty$

$$\text{由 } \frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{C_2} \leq \frac{3}{2}$$

$$Z = 5x_1 + 4x_2$$

如果 C_2 維持 4 不變, 則 C_1 的允許變動範圍

$$\frac{1}{2} \leq \frac{C_1}{4} \leq \frac{3}{2} \quad 2 \leq C_1 \leq 6$$

同理 C_1 維持 5 不變, 則 C_2 的允許變動範圍

$$\frac{1}{2} \leq \frac{5}{C_2} \leq \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \geq \frac{C_2}{5} \geq \frac{2}{3}$$

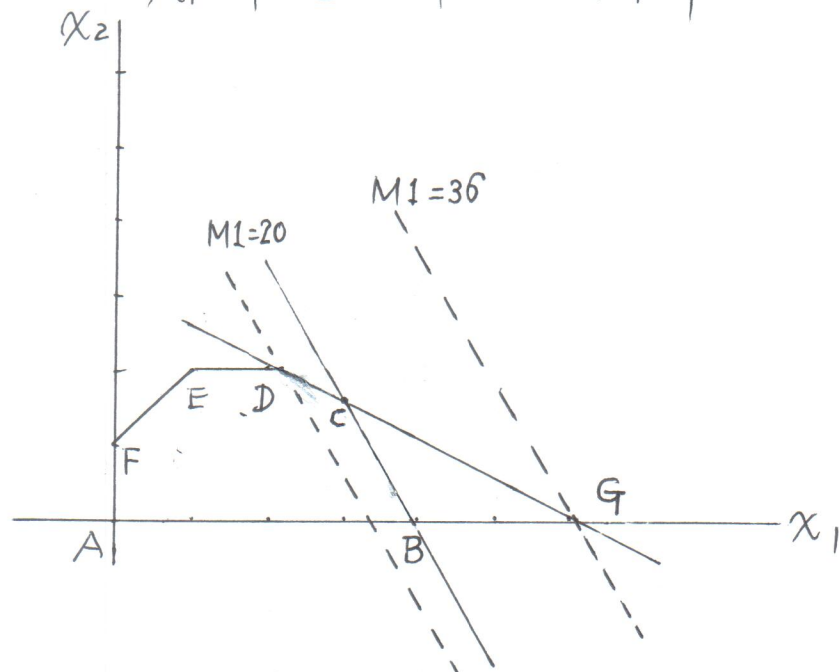
$$10 \geq C_2 \geq \frac{10}{3}$$

2. 限制式右邊係數的變動 (每單位資源的價值)

在 Reddy Mikks 例子, 最佳解 C 点是限制式 $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ 和 $x_1 + 2x_2 \leq 6$ 的限制式的交集。變動限制式右邊的係數代表資源的變動。任何資源變動會導致限制式平行移動, 例如

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \Rightarrow 6x_1 + 4x_2 \leq 36 \text{ 平行外移}$$

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \Rightarrow 6x_1 + 4x_2 \leq 20 \text{ 平行內移}$$



由上圖得知, 資源 1 的變動範圍只要在 DG 之間, 則最佳值 Z 都會成常數比例變動。 $D=(2, 2)$, $G=(6, 0)$

$$D=(2, 2) \text{ 對應到 } 6x_1 + 4x_2 = 6 \times 2 + 4 \times 2 = 20$$

$$G=(6, 0) \text{ 對應到 } 6x_1 + 4x_2 = 6 \times 6 = 36$$

所以 $M1$ 只要在 $20 \sim 36$ 之間，最佳值 Z 會成比例變動。令 $D1$ 代表原料 1 的變動範圍，目前 $M1 = 24 \therefore D1$ 為 $-4 \sim 12$
接著我們要計算每單位資源價值

$$D = (2, 2) \text{ 對應到 } 6x_1 + 4x_2 = 20 \quad Z = 5x_1 + 4x_2 = 18$$

$$G = (6, 0) \text{ 對應到 } 6x_1 + 4x_2 = 36 \quad Z = 5x_1 + 4x_2 = 30$$

令 y_1 代表 $M1$ 每單位價值

$$y_1 = \frac{30 - 18}{36 - 20} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75 \text{ (仟元)}$$

代表 $M1$ 在 $20 \sim 36$ 之間，變動 1 噸 $M1$ ，會影響 Z 值 $\frac{3}{4}$ 仟元，

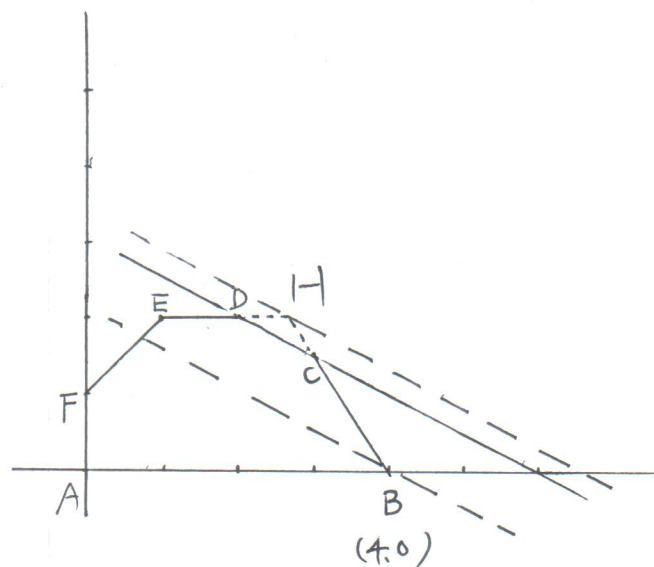
$$\text{例如 } M1 \rightarrow 23 \text{ 則 } Z = 21 - \frac{3}{4} = 20\frac{1}{4}$$

無需去解方程式，亦可驗證一下

$$\text{解: } \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 23 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases} \quad x_1 = \frac{11}{4}, \quad x_2 = \frac{13}{8} \quad Z = 20\frac{1}{4}$$

$$\text{同理 } M1 \rightarrow 25 \text{ 則 } Z = 21 + \frac{3}{4} = 21\frac{3}{4}$$

$$M1 \rightarrow 26 \text{ 則 } Z = 21 + 2 \cdot \frac{3}{4} = 22\frac{1}{2}$$



$$B = (4, 0) \quad H = \left(\frac{8}{3}, 2\right)$$

$H = (\frac{8}{3}, 2)$ 對應到 $x_1 + 2x_2 = \frac{8}{3} + 2 \times 2 = \frac{20}{3}$

M_2 在 $4 \sim \frac{20}{3}$ 之間變動, 令 D_2 為變動範圍

$$y_2 = \text{每單位資源價值} = \frac{\frac{64}{3} - 20}{\frac{20}{3} - 4} = \frac{1}{2} \text{ (仟元)}$$

一、某公司生產室外與室內兩種油漆，而製造油漆必須使用 M1 和 M2 兩種原料。第一種 M1 原料每天最大可能進貨量為 24 噸，第二種 M2 原料每天最大可能進貨量為 6 噸。生產每噸室外及室內油漆所需原料之組合與利潤如下表：

	每噸油漆所需原料		每日最大可能 進貨量 (噸)
	室外漆	室內漆	
M1	6	4	24
M2	1	2	6
每噸利潤單位 (百萬元)	5	4	

依據市場調查，室內油漆的需求，每天不會超過 2 噸，室內油漆之需求不會超過室內油漆 1 噸。該公司希望決定每天各應生產室內與室外油漆多少噸，會使每天利潤最大。綜合以上所述，我們的 LP 模式與最適解如下：

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & Z = 5x_1 + 4x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

LINDO

File Edit Solve Reports Window Help

Reports Window

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 21.00000

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	3.000000	0.000000
X2	1.500000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.750000
3)	0.000000	0.500000
4)	0.500000	0.000000
5)	2.500000	0.000000

NO. ITERATIONS= 2

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

VARIABLE	CURRENT COEF	OBJ COEFFICIENT RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X1	5.000000	1.000000	3.000000
X2	4.000000	6.000000	0.666667

ROW	CURRENT RHS	RIGHTHAND SIDE RANGES	
		ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	24.000000	12.000000	4.000000
3	6.000000	0.666667	2.000000
4	2.000000	INFINITY	0.500000
5	1.000000	INFINITY	2.500000

- (1) 應生產室內與室外油漆多少噸，會使每天利潤最大，並求每天的利潤為何。
- (2) 如果室內油漆，每噸利潤單位增加為 6（百萬元），試問應生產室內與室外油漆多少噸，會使每天利潤最大，並求每天的利潤為何。
- (3) 第一種 M1 原料每天最大可能進貨量增加為 30 噸，試問應生產室內與室外油漆多少噸，會使每天利潤最大，並求每天的利潤為何。
- (4) 第二種 M2 原料每天最大可能進貨量減少為 4 噸，試問應生產室內與室外油漆多少噸，會使每天利潤最大，並求每天的利潤為何。