

Network Analysis

路網分析

網路乃是利用線或通路 (Channels)，將不同的點連接起來所組成的系統。一般常見之網路有公路、鐵路、海、空運文、通網等，包括以上部分或全体所組成的較複雜網路，俗稱運輸網路。研究網路的目的。我們需將某種物品，從供給處運至需求處為止。當然我們所追求的是在有限資源下，使人們獲得最大的滿足（最小成本或最大利潤）。以上的目的所構成的網路都可以用 Simplex Method (單體簡捷法) 求解。但由於歷屆學者專家之努力，对一些網路問題，已發展一些特殊的計算 (演算) 法，在效率上遠比 Simplex Method 為佳。

教學原則 這門課 我會選擇一些

Topics 介紹. 例如 TSP. VRP. VRP (pickup and delivery). VRP (Time window constraint). PERT. CPM.

shortest path. capacitated Transportation model. Minimum Cost-flow. Chinese Postman Problem. Set Covering problem.

Minimum Spanning Tree. Maximum Flow. Assignment Problem. 在介紹這些 Topic 之前, 我們先用

3~4 週介紹. Simplex Method 與 Integer programming.

在介紹每一單元時, 會介紹使用 LP 或 IP 的 modeling 如何解決問題, 然後再介紹

LINDO 的軟體給個大家, 套入軟體即
(CPLEX) 求解速度較快

可解決問題, 因為不是每位都會寫程式, 所以演算法部分, 只做概念,

性的介紹(帶過), 因為 Network programming 13
的一些演算法大部分用一些 Labelling
procedure, 您要修過 data structure 和演算
法, 才會寫, 要不然即使您會 programming
可能也寫不出來。

簡化列梯型矩陣有下列特性：

- (1) 若一行中的元素非皆為零時，則此行中的第一個非零元素為 1. (稱為 leading 1 首項 1)
- (2) 若某些列的元素皆為零，則將其聚集在矩陣的最下方

(3) 任兩個連續列的元素不全為零時，兩列中首項 1 位在較左邊的放在較高列，首項 1 位在較右邊的放在較低列

(4) 每一行含有首項 1 時，其他元素皆為零
下列皆為簡化列梯型矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

滿足簡化列梯型矩陣 (1) (2) (3) 的矩陣稱為

列梯型矩陣 (row-echelon matrix)

下列皆為列梯型矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意看：列梯型矩陣，首項 1 下方均為 0。

簡化列梯型矩陣，首項 1 那一列上、下均為 0。

若能把一增廣矩陣化成簡化列梯型矩陣，
則由觀察法，可以看出方程組的解集合。

將前
新子矩陣的第一列乘上
2 得首項 1.

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

整個矩陣已經是 3 列-梯型矩陣 再經過下一個 step 就可找出簡化-3 列-梯型矩陣。

step 6 最後非零列開始往上進行，各列乘上適當乘數後加到上一列，求得首項 1 的上面元素皆為零。

將前矩陣第三列乘上
 $\frac{7}{2}$ 加至第二列

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

將前矩陣第三列乘上
-6 加至第一列

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

將前矩陣第三列乘上
5 加至第一列上。

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

最後得到簡化 3 列-梯型矩陣

(1-6) 可得簡化 3 列-梯型

上述步驟稱為 Gauss-Jordan 消元法。

假若僅用前五步驟，則可得 3 列-梯型。此法

稱為 Gauss 消元法

方程 > equation 方程 < 方程解

29

PAGE
DATE

令 x_1 為任意長 t , x_2 為任意長 s , 方程組有無限多解, 以下列方式表示

$$x_1 = -2 - 6s - 4t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = 1 - 3t, \quad x_4 = 2 - 5t, \quad x_5 = t$$

$$(d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

因此式未能滿足, 該方程式無解

從上面可以看出來, 一線性方程組如果它的增廣矩陣屬於簡化列梯型, 我們很容易就解出方程組的解。接下來我們介紹一個逐步的步驟, 把任一矩陣簡化成為簡化-列梯型矩陣, 以

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \text{ 為例。}$$

step 1: 找出元素不全為零的最左垂直列 (行)

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

↑ 最左非零

step 2: 用另一行與頂行交換。如有必要, 將一非零元素置在 step 1 所找出行的頂上方。

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \text{ 將前矩陣之第一列與第二列互調}$$

IMAGE

Step 3. 若在 Step 1 所找出行的頂上方是 a , 則第一列
乘上 $\frac{1}{a}$ 引進一首位 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{將前矩陣的第一列} \times \frac{1}{2}$$

Step 4 將第一列乘上適當乘數後, 加到各列上, 使首位
1 以下的元素皆為零.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{將前矩陣的第一列} \times -2 \\ \text{加到第三列} \end{array}$$

Step 5 現在保留矩陣的頂上列, 並回到 Step 1 的方
法來處理剩下的子矩陣 (submatrix) 一直到
矩陣成為列-梯型矩陣.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

子矩陣最左非零行:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{將前矩陣} \\ \rightarrow \text{子矩陣的第一列} \times \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{將前子矩陣中第一列} \times -5 \\ \text{加至第三列} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{保留子矩陣的頂上列} \\ \text{並回到 step 1.} \end{array}$$

子矩陣最左非零行

1.4 數學規劃之應用軟體

由於電腦硬體與軟體設備不斷地創新和改善，使得數學規劃能夠應用於求解大型的實際問題，諸如電力系統之發電與輸配電問題、水資源分析之問題、資源管理之問題、財務投資組合之問題、交通運輸之規畫問題、原料混拌之問題、與生產製造之問題等。為能夠解決這些大型的數學規劃問題，目前已經開發有多種商業應用軟體，專門用來解決數學規劃有關之問題。

目前應用在線性規劃的軟體以 LINDO(Schrage, 1990) 商業軟體較為一般所採用，除此之外，尚有其他比較新穎的軟體如 GAMS (Brooke, et al., 1985)、AMPL (Fourer et al., 1990)、LINGO (Schrage, 1991)、What's Best (Schrage, 1993)、及 AT & T 的 KORBX 系統 (Karmarkar, 1984) 等，可以協助使用者建立應用模式，提高求解功能，這些軟體同時也可用來求解整數規劃的問題。至於求解非線性規劃問題之軟體有 MINOS (Murtagh & Saunders, 1982)、GINO (Liebman et al., 1986)、GRG2 (Lasdon et al., 1978)、CONOPT (Drud, 1985)、SQP (Mahdihara & Lasdon, 1990)、和 LSQRG(Smith & Lasdon, 1992) 等商業性軟體，這些非線性規劃之應用軟體中，也有具有協助使用者建立應用模式與求解功能。在多目標規劃問題的求解軟體中，有 VIG 系統軟體 (Korhonen, 1987) 來協助決策者做決策。除此之外，尚有其他散佈在各軟體發行公司所發行的應用軟體之中，或正在開發中的，宜加以留意。

劉俊明 著

原著

數學規劃——理論與實務

第二章

線性規劃

2.1 線性規劃之定義

線性規劃(linear programming)是著眼於最佳化(極大化或極小化)一個線性的目標函數，同時又滿足一組線性的限制式，包括等式及不等式。一般線性規劃所能應用的問題多是有關於稀有資源，如人力、物料、機器、及資金，之使用或分配之事宜，期望在最少成本或最大利潤之目標下，獲得最好的使用方式或分配方案。目前已知線性規劃方法在國防軍事方面，經濟財務方面，工商企業，及社會方面等都被廣泛使用，而且還有許多領域正嘗試採用線性規劃方法去解決問題。

線性規劃應用的方法，都是透過決策模式的建立來尋找最佳的方案，在建立線性規劃模式過程中，可依循下列三個步驟來進行：

步驟 1. 依問題的特性來定義決策變數(decision variables)，通常決策變數是用來表示問題中決策所需要執行的事項或規劃的方案。

步驟2.由問題的分析中找出所有必要的限制條件，利用決策變數建立成數學等式或不等式之限制式(constraints)。

步驟3.根據問題所呈現的目標準則，利用決策變數建立其目標函數(the objective function)，並施以極大化或極小化。

為進一步闡釋線性規劃模式建立的步驟，吾人乃利用下列的一個生產規劃問題來說明。

例 2.1 生產規劃問題

explain it

大巨精密公司生產三種不同工作母機，即大型、中型、及小型等三種。每一種工作母機需要不同的製造方法，其中大型工作母機每台需要17小時的裝配，8小時的檢驗，而可獲得7500元利潤，中型工作母機每台需要10小時的裝配，4小時的檢驗，而可獲得5000元利潤，小型工作母機每台需要2小時的裝配，2小時的檢驗，而可獲得2500元的利潤。該公司每個月估計有1000小時之人力可用於裝配，500小時之人力可用於檢驗。此外，根據市場需求的調查，預估每個月大型工作母機的需求量不會超過50台，每個月中型工作母機和小型工作母機之需求量至少需要200台，唯如果中型工作母機需求量超過小型工作母機，則其多出的數量不會超過50台。請問在追求最大利潤之前提下，如何建立線性規劃模式以規劃生產？

解答：

步驟1.定義決策變數。由問題中得知決策所需要的生產規劃是決定三種工作母機每個月之生產數量，因此乃令

x_1 = 表大型工作母機每月生產量，

x_2 = 表中型工作母機每月生產量，

x_3 = 表小型工作母機每月生產量。

步驟2.建立限制式。由問題分析中得知其限制條件包括裝配工時限制，檢驗工時限制，以及需求量限制；在裝配工時方面，大型工作母機每台需17小時，中型工作母機每台需10小時，小型工作母機每台需2小時，可用於裝配之工時，每個月1000小時，因此得出其限制式為：

$$17x_1 + 10x_2 + 2x_3 \leq 1000$$

在檢驗工時方面，大型工作母機每台需8小時，中型工作母機每台需4小時，小型工作母機每台需2小時，而可用於檢驗之工時，每個月500小時，因此得出其限制式為：

$$8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 500$$

在需求方面，大型工作母機每月需求量不超過50台，因此得出其限制式為：

$$x_1 \leq 50$$

中型工作母機和小型工作母機每月需求量至少200台，因此其限制式為：

$$x_2 + x_3 \geq 200$$

又如果中型工作母機需求量超過小型工作母機，則多出的數量不超過50台，因此其限制式為：

$$x_2 - x_3 \leq 50$$

步驟3.建立目標函數。由問題中得知欲獲得最大利潤，又大型工作母機每台可獲利潤7500元，中型工作母機每台可獲利潤5000元，小型工作母機每台可獲利潤2500元，因此其目標函數可建立如下：

$$z = 7500x_1 + 5000x_2 + 2500x_3$$

因此，此一生產規劃問題所得出之線性規劃模式為：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 7500x_1 + 5000x_2 + 2500x_3 \\ \text{subject to } & 17x_1 + 10x_2 + 2x_3 \leq 1000 \\ & 8x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 500 \\ & x_1 \leq 50 \\ & x_2 + x_3 \geq 200 \\ & x_2 - x_3 \leq 50 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

線性規劃的決策模式由上面的實例中可以看出是有一定的列題方式，一般的線性規劃模式可陳述如下：

$$\begin{aligned} \text{maximize/minimize } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{subject to } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

其中 $z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 表示目標函數，施以極大化或極小化； $x_1, \dots, x_n$ 是決策變數，而 $c_1, \dots, c_n$ 是其在目標函數的係數； $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ 表第 i 個限制式，而 a_{ij} 表示變數 x_j 在限制式 i 之係數； $b_1, \dots, b_m$ 表限制式的右側值 (right-hand-side values)；最後的 $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ 表非負數限制式 (nonnegative constraints)。

如果有一組變數值 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 滿足所有的限制條件，則此一組變數值稱為可行解 (feasible solution)，所有這些可行解所組合之集合稱為可行區域 (feasible region)。

利用線性規劃來建立問題的決策模式時，需要考慮四種基本的假設，即比例性 (proportionality)，可加性 (additivity)，可分割性 (divisibility)，及確定性 (deterministic)，茲分別說明於下。

1. 比例性：就某一決策變數 x_j 而言，其單位利潤為 c_j ，其對目標函

數值之貢獻可表之為 c_jx_j ，若其對限制資源 i 之單位耗用量為 a_{ij} ，則該變數可能造成之消耗量為 $a_{ij}x_j$ 。換言之，這些貢獻量或使用量隨著變數值之增加而呈一定比例增加，不會產生折扣。

2. 可加性：指目標函數值是由各個變數的貢獻總和而成，而某限制資源的耗用量是由各個變數之耗用量總加而得，各決策變數之間不存在互補取代之關係。

3. 可分割性：指每個決策變數值可用任何分數值來表示，不必限於整數值。

4. 確定性：指模式中的各種係數 c_j 、 a_{ij} 及 b_i 都是確定的，不含任何機率性質、或不充份資訊情形。

接著利用下面幾個實際問題，說明如何利用線性規劃方法來求解問題。

例 2.2 燃煤調配問題

臺電公司利用燃煤發電的電廠需要耗用大量燃煤，為方便輪配電源，乃在不同地點設立 3 座電廠，即 A, B, C 三廠；燃煤的來源則分配在兩處礦場，即甲，乙兩地。由於燃煤不是均勻的物質，兩處礦場所生產的燃煤成份不相同，而各電廠發電鍋爐所用的燃煤亦須要符合其規定的成份。其中燃煤成份及需求量之規定如下：

電廠	煤 質 成 份				需求 量 噸 / 年
	硫分 %	熱量 Kcal / 噸	灰分 %		
	上限 下限	下限 上限	上限 下限		
A	1.2 ~ 0.80	7.0 ~ 6.0	16.0 ~ 0		700.0
B	0.65 ~ 0.45	7.5 ~ 6.2	7.5 ~ 0		470.0
C	0.85 ~ 0.55	7.8 ~ 6.4	7.0 ~ 0		1500.0

又兩處礦場所生產燃煤煤質、產量、及價格如下所示：

例 2.4

利用圖解法求解下列含有兩個變數的線性規劃模式：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to } &2x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ &x_1 - x_2 \leq 1 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解答：

其幾何圖形如圖 2.1 所示，其中由所有限制式所形成的多邊形 ABCDO 稱為可行區域(feasible region)，意味該多邊形內任何一點皆能滿足線性規劃問題所有的限制條件。再由目標函數所繪製成之數條平行直線可顯示愈往右上角之方向，其目標函數值愈大，此一方向稱為梯度方向(gradient direction)，顯著梯度方向 (3, 2)T，可找出一條目標函數等值線恰與該多邊形相切，由圖 2.1 中可以看出 B 是其切點，因此可判斷 B 點是此一線性規劃問題之最佳解之點。

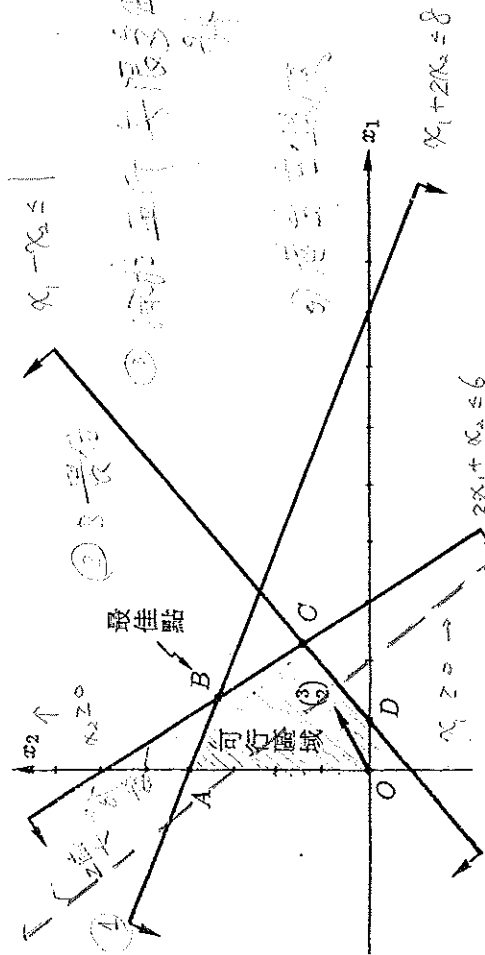


圖 2.1 線性規劃問題 2.4 之幾何圖形

根據圖解法求解線性規劃問題的過程中，可以看出線性規劃問題如果有解，其最佳解的點將會出現在可行區域中的端點(extreme point)。因此只要從某一個端點開始，沿著可行區域之邊界，逐次檢驗各端點的值，就可以決定最佳解的點，利用這種方式尋找最佳解，應該可以很快得出最佳解。

單體法就是根據上面的構想，以代數方法來表示幾何圖形的含義，也就是利用聯立方程式和非負數限制式來表示可行區域，以基本可行解(basic feasible solutions)來代表可行區域之端點，然後從一個基本可行解著手，不斷重複尋找可能為最佳解之基本可行解，直到最佳解出現。

首先為了說明如何利用聯立方程式和非負數限制式來表示可行區域，乃介紹一種線性規劃模式之標準形式(standard form)，該標準形式規定：

1. 所有的限制式，除了非負數限制式之外，都表為等號之方程式，其右側值為非負數。
2. 所有的決策變數都具有非負數的限制。
3. 目標函數施以極大化或極小化。

則由標準形式中所得出的限制聯立方程式和非負數限制式，即構成原來線性規劃模式中的可行區域。通常線性規劃模式中的限制式會出現有 $\leq$ 或 $\geq$ 之不等式，所以必須將其轉換成等式，又其決策變數中可能會出現可以為正負數情況，亦必須加以調整，其方法大致如下所示：

1. 如果某一限制式是 $\leq$ 不等式，則在不等號左側加上一個剩餘變數(slack variable)，將不等號改成等號。
2. 如果某一限制式是 $\geq$ 不等式，則在不等號左側減去一個剩餘變數(surplus variable)，將不等號改成等號。
3. 如果限制式之右側值是負數，則以 -1 同時乘上左右兩側之每一項

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq -6 \\ -2x_1 - x_2 &\geq 6 \end{aligned}$$

即可。

$$y_1 = y_1^+ - y_1^-$$

4. 如果某變數 y_i 不具有非負數之限制，可以用其他兩個非負數的變數來取代，即以 $y_i = y_i^+ - y_i^-$ ， $y_i^+, y_i^- \geq 0$ 來取代代模式中每一個 y_i 的位置。

y_1 與 y_2 不可同時為正

$$\begin{cases} 5 = 5 - 0 \\ -5 = 0 - 5 \\ 0 = 0 - 0 \end{cases}$$

例 2.5

將下列線性規劃模式轉成標準形式：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{subject to } &x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ &x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ &-x_1 + x_2 - x_3 \leq -1 \\ &x_2, x_3 \geq 0, x_1 \text{ unrestricted} \end{aligned}$$

解答：

首先在第一個限制式中加上情變數，變成

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 12, s_1 \geq 0$$

在第二個限制式中減去剩餘變數，變成

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 = 3, s_2 \geq 0$$

在第三個限制式中加上情變數，變成

$$-x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = -1$$

再以 (-1) 乘這等式之左右兩側，得出

$$x_1 - x_2 + x_3 - s_3 = 1$$

以 $x_1 = x_1' - x_1''$ 取代代模式中有 x_1 之位置，

$$x_1', x_1'' \geq 0$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \text{ linear independent}$$

at least one $a_i \neq 0$ 不然 0

因此得出該線性規劃模式之標準形式為

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 2x_1' - 2x_1'' - 3x_2 + 5x_3 \\ \text{subject to } &x_1' - x_1'' - 2x_2 + 3x_3 + s_1 = 12 \\ &x_1' - x_1'' + x_2 + 2x_3 - s_2 = 3 \\ &x_1' - x_1'' - x_2 + x_3 - s_3 = 1 \\ &x_1', x_1'', x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

接著要說明如何利用標準形式中聯立方程式的解來表示可行區域的端點。依線性代數求解聯立方程式的特性，假設某一聯立方程式有 m 個獨立方程式， n 個未知數或變數，則其解有三種情況：

1. 如果 $m = n$ ，則會有唯一解。

2. 如果 $m > n$ ，則無解。

3. 如果 $m < n$ ，則有無限個解。

一般線性規劃所形成的聯立方程式，由於其變數數目都超過方程式數目，其產生的解應屬於第三種情況。但為了避免無限個解之困擾，乃特意規定其求解之方式，令其中 $n - m$ 個變數之值為零，利用剩下的 m 個變數來解其聯立方程式，必可得出一個解，這個解特稱為基本解 (basic solution)，而值設定為零的 $n - m$ 個變數，稱為非基本變數 (nonbasic variables)，用來解聯立方程式的 m 個變數，稱為基本變數 (basic variables)。利用上面所規定的方式所得出的基本解數目最多不會超過 $n!/(m!(n-m)!)$ 。

在這些基本解中，有的基本解的變數值可能為負數，有的基本解的變數值全部為非負數，如果所得出的基本解，其所有變數的值均為非負數，則稱為基本可行解，如果有出現負數者，則稱為不可行之基本解 (infeasible basic solution)，其中這些可行基本解即為可行區域中的端點。

例 2.6

求解下列限制式之可行基本解，並在幾何圖形上標示。

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

解答：

先將其轉換成標準形式，

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 10$$

$$3x_1 - 4x_2 + s_2 = 2$$

$$x_1 + x_2 - s_3 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

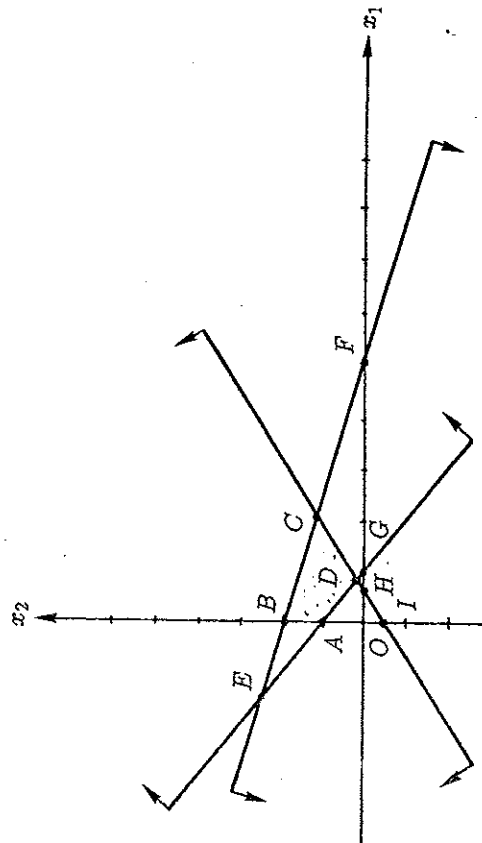


圖 2.2 線性規劃例題 2.6 之幾何圖形

其幾何圖形上之可行區域如圖 2.2 所示，其中多邊形 ABCD 是其可行區域，A、B、C、D 是其端點，另外尚有 E、F、G、H、I 及

O 是其他的端點，表 2.1 顯示標準形式之聯立方程式所得出基本可行解和不可行基本解，和幾何圖形上交點之對應關係。在這個例子中，基本解和端點是呈現一對一的關係，但在某些情況下，基本解和端點並不完全是呈現一對一的關係。

表 2.1 基本解和端點之對應關係

基本解	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	端點	可行否
1	0	0	10	2	-1	O	不可行
2	0	2	0	10	1	B	可行
3	0	1	5	6	0	A	可行
4	60/23	34/23	0	0	71/23	C	可行
5	6/7	1/7	53/7	0	0	D	可行
6	-5/3	8/3	0	-38/3	0	E	不可行
7	5	0	0	-13	4	F	不可行
8	1	0	9	-1	0	G	不可行
9	2/3	0	26/3	0	-1/3	H	不可行
10	0	-1/2	15	0	1/2	I	不可行

接著乃正式介紹單體法的計算步驟，如下所示：

步驟 1. 將線性規劃模式轉換成標準形式，尋找一個基本可行解。

步驟 2. 檢驗該基本可行解是否為最佳解，如果不是，則繼續下一步驟。

步驟 3. 尋找其鄰近基本可行解作為一個比較好的基本可行解。

步驟 4. 利用高斯消去法 (Gaussian elimination) 計算新的基本可行解，返回步驟 2。

接著乃利用下面的線性規劃問題之例子來說明上面的四個步驟之細節。

是以右側值除以進入行中相對應之正係數，所得出的各比值中，選擇最小比值的限制式為阻擋限制式，而阻擋限制式的基本變數為退出變數。如此例中，所得出的比值分別為(2, 4, -)，則選第一限制式為阻擋限制式， s_1 為退出變數。

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z - x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0 \\ \text{subject to} & -2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \quad 6/3 = 2 \\ & 4x_1 + 5x_2 + s_2 = 20 \quad 20/5 = 4 \\ & x_1 - 2x_2 + s_3 = 2 \quad - \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

接著進入步驟4利用高斯消去法計算新的基本可行解及目標函數值。當決定了進入變數及退出變數，就以進入變數在阻擋限制式的位位置為樞軸元素(pivot element)，來進行高斯消去法。首先將樞軸元素的係數化為+1，在這同時亦要將阻擋限制式中每一項的係數加以修正，亦即乘上樞軸元素係數之倒數。然後進入行中每一個係數，包括在目標函數之係數，設法消去而等於零，其方法是以進入行中的係數之負數乘上阻擋限制式中之每一項，再加入到該係數所在限制式之對應項上，即可消去進入行上的係數。其最後的計算結果，將會使進入行除了樞軸元素係數為1以外，其餘的係數必為零。以此例來說明，其結果應為：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z - 13/3x_1 + 0x_2 + 5/3s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 10 \\ \text{subject to} & -2/3x_1 + x_2 + 1/3s_1 = 2 \\ & 22/3x_1 - 5/3s_1 + s_2 = 10 \\ & -1/3x_1 + 2/3s_1 + s_3 = 6 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

由上面的模式中可以看出新的基本可行解為 $x_2 = 2$ 、 $s_2 = 10$ 、 $x_3 = 6$ ，而其餘變數 x_1 及 s_1 均為0，目標函數值為10。比較前一個基

本可行解，顯示新之基本可行解更接近最佳解。然後以此一新的基本可行解返回步驟2來檢驗其是否為最佳解。

根據其非基本變數 x_1 及 s_1 在目前目標函數的係數得知，如果 x_1 變為正數，則可以改善目標函數值，顯然此一基本可行解並非最佳解。因此再尋找其相鄰基本可行解。

由於非基本變數中只有 x_1 可以因變為正數來改善目標函數值，故選 x_1 為進入變數，再利用計算比值的結果，得知第二限制式為阻擋限制式， s_2 為退出變數，因此獲得其相鄰基本可行解。再利用高斯消去法，以 x_1 在阻擋限制式之位置為樞軸元素來計算新的基本可行解，其結果如下所示：

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z + 0x_1 + 0x_2 + 15/22s_1 + 13/33s_2 + 0s_3 = 746/33 \\ \text{subject to} & x_2 + 2/11s_1 + 1/11s_2 = 32/11 \\ & x_1 - 5/22s_1 + 3/22s_2 = 15/11 \\ & 13/22s_1 + 1/22s_2 + s_3 = 71/11 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

由上面的模式可以得出此一新的基本可行解，為 $x_2 = 32/11$ ， $x_1 = 15/11$ ， $s_3 = 71/11$ ， $s_1 = 0$ ， $s_2 = 0$ ，而目標函數值為 $z = 746/33$ 。再根據目前之目標函數之係數來判斷，由於兩個非基本變數 s_1 及 s_2 ，如果變為正數，不會進一步改善目標函數值，因此可以斷定此一基本可行解必為最佳解。

通常在利用單體法求解問題時，其演算過程都採用一種單體表(simplex tableau)來進行，在單體表中只保留模式中的係數及右側值，並標明基本變數，由上面例子的計算過程可由表2.2所顯示的單體表來對照說明。在計算過程中，通常一個單體表提供一個基本可行解，如果需要尋找三個基本可行解始得出最佳解，則需要三個單體表，亦表示需要三個迭代步驟(iterations)。

線性規劃模式中的目標函數不是施以極大化，就是施以極小化。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 + 5x_2 \\ \text{subject to } &-2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ &4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\ &x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

在步驟 1 裏，先要將此一線性規劃模式轉換成標準形式，因此得

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 - 5x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 = 0 \\ \text{subject to } &-2x_1 + 3x_2 + s_1 = 6 \\ &4x_1 + 5x_2 + s_2 = 20 \\ &x_1 - 2x_2 + s_3 = 2 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

為計算方便起見，在目標函數中的變數項全部移到等號左側。接著要尋找一個基本可行解，這可分成兩種情況，情況一，如果限制式含有脛變數，則令脛變數為基本變數，情況二，如果限制式不含脛變數，則再引進一個人工變數 (artificial variable)，作為基本變數。

假如線性規劃之標準形式中，每一個限制式都含有脛變數，則可令這些脛變數為基本變數，其值等於其右側值，而其他之變數為非基本變數，其值設定為零。如此即可得出一個基本可行解。例如在此例題中，令 s_1, s_2 及 s_3 為基本變數，其值分別為 6、20 及 2，而 x_1 及 x_2 為非基本變數，其值都為 0，則為一基本可行解，其目標函數值為零。假如線性規劃之標準形式中，出現利用人工變數作基本變數者，必須利用大 M 法 (the big-M method) 或兩階段法 (two-phase method)，將這些人工變數予以消除，同時獲得基本可行解，其方法容後介紹。

在步驟 2 需要說明如何去檢驗該基本可行解是否為最佳解。這可由當時的目標函數之係數來判斷，其方法是檢查基本可行解中每一個非基本變數在目標函數之係數，如果所有的係數在其對應的非基本變數變成正數時，無法改善目標函數值時，則可以判斷這個基本可行解

為最佳解。反之，若存在一非基本變數，其目標函數之係數能夠在該非基本變數變為正數時，改善當時之目標函數值，則該基本可行解必非一最佳解。在此例中，由所得出的基本可行解知 x_1 及 x_2 為非基本變數，其在目標函數的係數分別為 (-1) 及 (-5) 。當 x_1 或 x_2 變為正數時，該目標函數值必增加，由於目標函數是要施以極大化，因此當 x_1 或 x_2 變為正數時，可以改善當時之目標函數值，故判斷此一基本可行解非最佳解，那麼就要去找一個鄰近的基本可行解作為新的基本可行解。

步驟 3 需要說明如何去找一個比較好的相鄰基本可行解 (adjacent basic feasible solution)。所謂相鄰基本可行解，是指其他的基本可行解中，只有一個基本變數及一個非基本變數不相同，其餘的基本變數和非基本變數都是相同者。因此要找相鄰基本可行解，只要更換其中一個基本變數和一個非基本變數即可，但是要如何更換？由非基本變數中，挑選其值如果變為正數時，最能改善目標函數值者，作為基本變數。如此例中，非基本變數 x_1 及 x_2 皆可以選為基本變數，唯由目標函數之係數得知， x_2 之單位貢獻量大於 x_1 之單位貢獻量，故選 x_2 作為基本變數，特稱為進入變數 (entering variable)，而進入變數所形成的行稱為進入行 (entering column)，如 $(-5, 3, 5, -2)^T$ 。

當決定新的基本變數後，由於基本變數之數目是固定的，因此要排除掉一個現有之基本變數，其方法是利用進入行的係數及其右側值來判斷，吾人可以想像在進入行的係數是表示進入變數增加一個單位時，耗用或增加其右側值之數量，因此利用右側值除以進入行之係數所得出之比值，如果是正數，即表該限制式容許進入變數增加的數量，由不同限制式所得出的比值中，能夠看出進入變數之最大增加量，提供進入變數最大增加量之限制式稱為阻擋限制式 (blocking constraint) 又稱為樞軸列，而阻擋限制式的基本變數就要被取代而成為非基本變數，稱為退出變數 (leaving variable)。換言之，決定退出變數的方法

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 \\ 4 - 2x_2 - x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 \\ -3x_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 \\ x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

由於目標函數的準則在單體法的計算過程扮演相當重要的角色，因此有必要在此加以說明極大化目標函數和極小化目標函數在計算過程所造成的差異。此一差異發生在步驟 2 及步驟 3 中。當判斷某一基本可行解是否為最佳解時，如果目標函數是施以極大化，則檢查其非基本變數變成正數時，目標函數值仍然無法增加；如果目標函數是施以極小化，則檢查其非基本變數變為正數時，目標函數值仍然無法減少。若結果是肯定的，則表示最佳條件成立。

若判斷為非最佳解，則須從非基本變數中決定一個進入變數，在極大化目標函數之情況，依經驗法則，挑選對目標函數值之單位增加最多之非基本變數為進入變數；在極小化目標函數之情況，挑選對目標函數值之單位減少最多之非基本變數為進入變數。如此，將可尋找一個比較好之相鄰基本可行解。

表 2.2 利用單體法說明標準單體法

	basic	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	RHS
z		-1	-5	0	0	0	0
s_1		2	3	1	0	0	6
s_2		4	5	0	1	0	20
s_3		1	2	0	0	1	2
z		-13/3	0	5/3	0	0	10
x_2		-2/3	1	1/3	0	0	2
s_2		22/3	0	-5/3	1	0	10
s_3		-1/3	0	2/3	0	1	6
z		0	0	15/22	13/33	0	746/33
x_2		0	1	2/11	1/11	0	32/11
x_1		1	0	-5/22	3/22	0	15/11
s_3		0	0	13/22	1/22	1	71/11

在步驟 1 中，如果存在限制式不含有暫變數，則以引進人工變數暫時當作基本變數來進行求解。由於所引進的人工變數在原本的問題

Gauss elimination

中是不具有任何含義，故必須在演算過程中儘速將其變為非基本變數，並且防止再成為基本變數。一般所因應的方法有兩種，一種為大 M 法，另一種為兩階段法，分別陳述於下。

2.2.1 大 M 法

在大 M 法中，是將人工變數乘以一個大值 M 後，放在目標函數中，如果是極大化情況，則是以負數項處理，如果是極小化情況，則是以正數項處理，然後再利用單體法求解。唯在求解之前，需利用高斯消去法將人工變數在目標函數之係數予以消除，成為零係數。其計算過程以下的線性規劃問題來說明。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to } &x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ &x_1 + x_2 = 3 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

首先將此線性規劃模式轉換成標準形式。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\ \text{subject to } &x_1 - 2x_2 - s_1 = 2 \quad -s_1 = 2 \\ &2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \quad s_2 = 12 \\ &x_1 + 3x_2 = 3 \quad 0 = 3 \\ &x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

由於第一限制式及第三限制式不合標準形式，遂分別引進人工變數 a_1 及 a_2 作為該限制式之基本變數，並且將這兩個人工變數各乘以一個大值 M，放在目標函數中，以負數項處理。

左實 ≥ 式時 左金 =

無法立刻 實現

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 - M a_1 - M a_2 \\ \text{subject to } & x_1 - 2x_2 - s_1 + a_1 R_1 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 + a_2 R_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

在正式利用單體法之前，需將目標函數中人工變數 a_1 及 a_2 之係數

利用高斯消去法，變為零係數，遂得出下列模式。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= (1+2M)x_1 - (3-M)x_2 - Ms_1 + 0s_2 + 0a_1 + 0a_2 = 5M \\ \text{subject to } & x_1 - 2x_2 - s_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 + a_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

根據這個模式得知 $a_1 = 2, s_2 = 12, a_2 = 3$ 為基本變數， $x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0$ 為非基本變數， $z = 5M$ 為目標函數值。此一解並非最佳解，遂選 x_1 為進入變數，經計算比值得知 a_1 為退出變數，而 x_1 在第一限制式之位置為樞軸元素，經利用高斯消去法計算新的解，其模式修正為：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &+ 0x_1 - (5+3M)x_2 - (1+M)s_1 + 0s_2 + (1+2M)a_1 \\ \text{subject to } & x_1 - 2x_2 - s_1 + 0s_2 + a_1 + 0a_2 = 2 \\ & 7x_2 + 2s_1 + s_2 - 2a_1 + 0a_2 = 8 \\ & x_1 + 3x_2 + s_1 + 0s_2 + a_1 + a_2 = 1 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

由此模式得知 $x_1 = 2, s_2 = 8, a_2 = 1$ 為基本變數， $x_2 = 0, s_1 = 0, a_1 = 0$ 為非基本變數， $z = 2 - M$ 為目標函數值。經判斷此一解並非最佳解，遂選 x_2 為進入變數， a_2 為退出變數， x_2 在第三限制式之位置為樞軸點，經利用高斯消去法計算新的解，得出其修正的模式為：

$$\begin{aligned} \text{max } z &+ 0x_1 + 0x_2 + 2/3s_1 + 0s_2 + (-2/3+M)a_1 + (5/3+M)a_2 = 11/3 \\ \text{s. t. } & x_1 + 0x_2 - 1/3s_1 + 0s_2 + 1/3a_1 + 2/3a_2 = 8/3 \\ & 0x_1 + 0x_2 - 1/3s_1 + s_2 + 1/3a_1 - 7/3a_2 = 17/3 \\ & 0x_1 + x_2 + 1/3s_1 + 0s_2 - 1/3a_1 + 1/3a_2 = 1/3 \end{aligned}$$

在BV下， $x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0$
表2.3 利用單體表說明大M法

	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
basic	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	
z	-1	-3	0	0	M	M	0
a_1	1	-2	-1	0	1	0	2
s_2	2	3	0	1	0	0	12
a_2	1	1	0	0	0	1	3
z	$-(1+2M)$	$-(3+M)$	M	0	0	0	$5M$
a_1	①	-2	-1	0	1	0	2
s_2	2	3	0	1	0	0	12
a_2	1	1	0	0	0	1	3
z	0	$-(5+3M)$	$-(1+M)$	0	$(1+2M)$	0	$2-M$
x_1	1	-2	-1	0	1	0	2
s_2	0	7	2	1	-2	0	8
a_2	0	③	1	0	-1	1	1
z	0	0	2/3	0	$(-2/3+M)$	$(5/3+M)$	11/3
x_1	1	0	-1/3	0	1/3	2/3	8/3
s_2	0	0	-1/3	1	1/3	-7/3	17/3
x_2	0	1	1/3	0	-1/3	1/3	1/3

由此一模式得知 $x_1 = 8/3, s_1 = 17/3, x_2 = 1/3$ 為基本變數， $s_1 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0$ 為非基本變數， $z = 11/3$ 為目標函數值。在檢驗此一目標函數中之係數，得知此一解必為最佳解。此一問題之演算過程亦可利用單體表來表示，如表2.3所顯示。

2.2.2 兩階段法

在兩階段法中，顧名思義，是利用兩個階段來進行尋找最佳解，在第一階段中是尋求所有人工變數總和為最小，而受限於原有的限制

大M法可能不穩
兩階段法

第一階段

式之極小化問題，以人工變數或增變數當作基本變數，利用單體法步驟求解最佳解，在正式利用單體法步驟之前，需用高斯消去法將目標函數中人工變數之係數加以消去而為零。

在第一階段求解過程，出現最佳解條件時，如果每一個人工變數之值都是零，則進入第二階段；如果存在人工變數的值不為零，則表示該問題沒有解，不必再繼續求解。

在第二階段中，以原來問題的目標函數取代第一階段最佳解的目標函數係數，同時保留第一階段最佳解模式之限制式係數，但刪除人工變數之部份，利用單體法步驟來求解；同樣地，在正式利用單體法步驟求解之前，須將目標函數中，基本變數之係數消去而為零。

茲利用上面的例子來示範兩階段法，在第一階段中，所欲解決的問題為：

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &= 0x_1 + 0x_2 + 0s_1 + 0s_2 + a_1 + a_2 \\ \text{subject to } & x_1 - 2x_2 - s_1 + 0s_2 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

首先將目標函數中人工變數 a_1 及 a_2 的係數，利用高斯消去法消去而成為零值，乃得出下列的列題模式。

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &+ 2x_1 - x_2 - s_1 + 0s_2 + 0a_1 + 0a_2 = 5 \\ \text{subject to } & x_1 - 2x_2 - s_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 + s_2 = 12 \\ & x_1 + x_2 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

其次利用單體法的步驟，得出第一階段的最佳解之列題方式：

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &+ 0x_1 + 0x_2 + 0s_1 + 0s_2 - a_1 - a_2 = 0 \\ \text{subject to } & x_1 - 1/3s_1 + 1/3a_1 + 2/3a_2 = 8/3 \\ & -1/3s_1 + s_2 - 1/3a_1 - 7/3a_2 = 17/3 \\ & x_2 + 1/3s_1 - 1/3a_1 + 1/3a_2 = 1/3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

根據此一模式，吾人可以看出 $x_1 = 8/3$, $s_2 = 17/3$, $x_2 = 1/3$, 以原來問題 $s_1 = 0$ 為原來問題之一個基本可行解，接著進入第二階段，以原來問題之目標函數為第二階段問題之目標函數，以第一階段最佳解之列題方式中的限制式，將人工變數之部份刪去，作為第二階段問題之限制，而得出下列的列題方式。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &- x_1 - 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 = 0 \\ \text{subject to } & x_1 - 1/3s_1 = 8/3 \\ & -1/3s_1 + s_2 = 17/3 \\ & x_2 + 1/3s_1 = 1/3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

再將目標函數中基本變數的係數，利用高斯消去法消去而成為零值，得出下列的列題方式。

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &+ 0x_1 + 0x_2 + 2/3s_1 + 0s_2 = 11/3 \\ \text{subject to } & x_1 - 1/3s_1 = 8/3 \\ & -1/3s_1 + s_2 = 17/3 \\ & x_2 + 1/3s_1 = 1/3 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

根據最佳解條件來判斷，得知此一系列題方式之基本可行解 $x_1 = 8/3$, $s_2 = 17/3$, $x_2 = 1/3$, $s_1 = 0$ 為最佳解，其目標函數值為 $z = 11/3$ 。整個兩階段法之計算過程可由表 2.4 中利用單體表來說明。

表 2.4 利用單體表說明兩階段法

Basic	x_1	x_2	s_1	s_2	a_1	a_2	RHS
z	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	1	-2	-1	0	1	0	2
s_2	2	3	0	1	0	0	12
a_2	1	1	0	0	0	1	3
z	2	-1	-1	0	0	0	5
a_1	①	-2	-1	0	1	0	2
s_2	2	3	0	1	0	0	12
a_2	1	1	0	0	0	1	3
z	0	3	1	0	-2	0	1
x_1	1	-2	-1	0	1	0	2
s_2	0	7	2	1	-2	0	8
a_2	0	③	1	0	-1	1	1
z	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	0	-1/3	0	1/3	2/3	8/3
s_2	0	0	-1/3	1	1/3	-7/3	17/3
x_2	0	1	1/3	0	1/3	1/3	1/3
$Max\ z$	-1	-3	0	0			0
x_1	1	0	-1/3	0			8/3
s_2	0	0	-1/3	1			17/3
x_2	0	1	1/3	0			1/3
z	0	0	2/3	0			11/3
x_1	1	0	-1/3	0			8/3
s_2	0	0	-1/3	1			17/3
x_2	0	1	1/3	0			1/3

2.2.3 特殊解

最後探討線性規劃問題求解最佳解中，可能出現的幾種特殊情況。通常線性規劃問題中，除了唯一最佳解之外，尚可能出現退化解。

(degeneracy), 多重解 (alternative solutions), 沒有界限解 (unbounded solution), 無解 (infeasible solution) 等四種特殊情況。

當某一基本可行解或最佳解中，其基本變數出現零值者，即為一種退化解。在求解過程中，在進行比值計算及檢驗時，出現兩個或兩個以上同等值之最小比值，會有多重退出變數之現象，通常由上而下的順序挑選退出變數，則所得出的新之基本可行解必為一種退化解。出現退化解時，如果該退化解並非最佳解，再尋求下一個基本可行解時，基本變數為零者必為退出變數，而且目標函數值仍維持不變。依幾何圖形上之意義，是一種兩個或兩個以上基本可行解對應著可行區域上同一個端點，或是在平面上存在三個或三個以上限制式方程式相交於同一點。出現退化解時，多少會拖延求解的速度，唯一般並不會發生停滯 (stalling) 之現象，只要不造成循環 (cycling)，終究會得出最佳解。

當存在有兩個或兩個以上基本可行解，同時為最佳解時，即為一種多重解。在求解過程中，當最佳解條件出現，同時存在某非基本變數在目標函數列的係數值為零，則必為多重解，此時可令係數值為零的非基本變數為進入變數，從而得出另一個最佳解；如果尚有其他基本可行解為最佳解，可按照此法求得。在幾何圖形上的意義為，可行區域的某一邊界與最佳解目標函數值之等值線互相重合，因此造成該邊界上的端點以及所含的點皆為最佳解的點。通常用來表示多重解方式，先找出所有可能基本可行解，再依線性組合 (linear combination) 之方式來表示。

當最佳解的目標函數值是無限時，則為無限值的解。在求解過程中，決定進入變數之後，如果發現進入行的係數全部都是負值或零值，則表示無法找到一個阻擋限制式來限制進入變數的增加數值，因此該進入變數可以沒有限制的增加其值，所以目標函數值也隨著無限地增加，而形成沒有界限的解。在幾何圖形上的意義為，可行區域是屬

於沒有界限的多邊體，同時目標函數的梯度方向是朝著多邊體沒有界限之一邊前進，因此就發生目標函數之等值線在梯度方向上無法與可行區域之點相切。

最後是關於無解的情況，這表示線性規劃問題不存在最佳解，亦表示不存在任何之基本可行解。在求解過程中，如果利用大 M 法，當最佳解條件出現時，倘有人工變數為基本變數，而其值為正數者，表示該問題無解。如果利用兩階段法，在第一階段出現最佳解條件時，倘存在有人工變數的值為正數，或目標函數值不為零，則表示無解之情況，在幾何圖形上的意義為可行區域屬於空集合。

2.3 修正單體法 Revised Simplex Method

從前面所陳述的內容可以顯示任何線性規劃的問題皆可利用單體法求解，所得出的解不外是唯一最佳解、退化解、多重解、無限解、或是無解，因此一般認為單體法是一種強而有力的演算法。接著就要探討單體法的計算理論基礎，俾能更深一層瞭解單體法的內涵，從而去體會如何修正單體法。

單體法的計算理論完全是根據線性代數的原理及計算方法所發展而成。為推導單體法之計算理論，吾人將以向量和矩陣來表示線性規劃模式之標準形式。對任何一個線性規劃問題，其標準形式皆可表之如下：

$$\begin{aligned} \text{maximize/minimize } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{subject to } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

$c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad C = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

則線性規劃問題之標準形式可簡化為

$$\begin{aligned} \max/\min \quad & z = cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

在此一線性規劃模式中， A 是一個 m 乘 n 的矩陣，而且矩陣 A 之秩 (rank) 是 m ，又其右側值皆為非負數。茲給予某一可行基本解，根據基本解之定義，吾人令 x_b 表其基本變數之組成向量， x_n 表其非基本變數之組成向量，而 x_b 在目標函數的係數向量為 c_b ， x_n 在目標函數的係數向量為 c_n ；又 x_b 在限制式的係數矩陣為 B 特稱為基底 (basis)； x_n 在限制式的係數矩陣為 N 。遂可以下面的分類之方式表示， $x = (x_n, x_b)$ ， $c = (c_n, c_b)$ 和 $A = [N, B]$ 表之。則依據此種分類之方式，可以將上面的模式改寫為：

$$\begin{aligned} \max/\min \quad & z = [c_n, c_b] \begin{bmatrix} x_n \\ x_b \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & [N, B] \begin{bmatrix} x_n \\ x_b \end{bmatrix} = b \\ & x_n, x_b \geq 0 \end{aligned}$$

explain

或是表之為

$$\begin{aligned} \max/\min \quad & z = c_n x_n + c_b x_b \\ \text{s. t.} \quad & N x_n + B x_b = b \\ & x_n, x_b \geq 0 \end{aligned}$$

從限制式的部份，吾人可以推導出該基本可行解中基本變數之計算公式。由於矩陣 A 的秩是 m ，故矩陣 B 是一個 m 乘 m 之非特異矩陣 (non-singular matrix)， B 的逆矩陣 (inverse)， B^{-1} 必存在。利用 B^{-1} 由左側乘入限制式的每一項中，得出

$$\begin{aligned} B^{-1} N x_n + B^{-1} B x_b &= B^{-1} b \\ B^{-1} N x_n + I x_b &= B^{-1} b \end{aligned} \quad (2.1)$$

或是

$$x_b = B^{-1} b - B^{-1} N x_n \quad (2.2)$$

將 (2.2) 式代入目標函數中，則導出

$$\begin{aligned} z &= c_n x_n + c_b (B^{-1} b - B^{-1} N x_n) \\ &= c_n x_n + c_b B^{-1} b - c_b B^{-1} N x_n \\ &= c_b B^{-1} b - (c_b B^{-1} N - c_n) x_n \end{aligned}$$

或是

$$z + (c_b B^{-1} N - c_n) x_n = c_b B^{-1} b \quad (2.3)$$

因此將 (2.1) 式及 (2.3) 式置於模式中，則顯示線性規劃問題中，如給予一個基本可行解 $x = (x_b, x_n)$ ，則可將模式改寫為：

$$\begin{aligned} \max/\min \quad & z + (c_b B^{-1} N - c_n) x_n + 0 x_b = c_b B^{-1} b \\ \text{s. t.} \quad & B^{-1} N x_n + I x_b = B^{-1} b \\ & x_n, x_b \geq 0 \end{aligned}$$

依照此一模式的表示法，當非基本變數值設定為零，即可導出計算基本變數及目標函數值之計算公式：

- (1) $x_b = B^{-1} b$ *基本變數之值*
- (2) $z = c_b B^{-1} b$ *目標函數值*

至於非基本變數 x_n 在目標函數中及限制式中之係數可以進一步加以推導。由於

$$\begin{aligned} c_b B^{-1} N - c_n &= c_b B^{-1} (P_1, P_2, \dots, P_k) - (c_1, c_2, \dots, c_k) \\ &= (c_b B^{-1} P_1 - c_1, c_b B^{-1} P_2 - c_2, \dots, c_b B^{-1} P_k - c_k) \end{aligned}$$

$$\text{故得 } (c_b B^{-1} N - c_n) x_n = \sum_{j \in nb} (c_b B^{-1} P_j - c_j) x_j$$

其中 nb 表非基本變數所構成之集合。依慣例，吾人又以

$$z_j - c_j = c_b B^{-1} P_j - c_j$$

來表示非基本變數 x_j 在目標函數中之係數。又因

$$\begin{aligned} \text{constant } B^{-1} N &= B^{-1} (P_1, P_2, \dots, P_k) \\ &= (B^{-1} P_1, B^{-1} P_2, \dots, B^{-1} P_k) \end{aligned}$$

故得

$$B^{-1} N x_n = \sum_{j \in nb} (B^{-1} P_j) x_j$$

依慣例，吾人以 $y_j = B^{-1} P_j$ 來表示非基本變數 x_j 在限制式中之係數向量。所以又導出兩個分別計算非基本變數 x_j 在目標函數之係數及限制式之係數向量之公式。

- (3) $z_j - c_j = c_b B^{-1} P_j - c_j$ *objective function*
- (4) $y_j = B^{-1} P_j$ *constraints coefficients*

此四個計算公式即構成單體法之計算依據。上述的討論亦可利用單體表說明，在表 2.5 中顯示其過程。

因為 $B = I$, $c_b = (0, 0, 0, 0)$,

$$x_b = B^{-1}b = b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad z = c_b B^{-1}b = 0.$$

計算非基本變數 x_1 及 x_2 的 $z_j - c_j$ 值如下：

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= c_b B^{-1}P_1 - c_1 = -3 < 0 \\ z_2 - c_2 &= c_b B^{-1}P_2 - c_2 = -2 < 0 \end{aligned}$$

顯示此一基本可行解並非最佳解。由於 x_1 的 $-(z_1 - c_1)$ 值比較大，故選為進入變數。計算其進入行的係數：

$$y_1 = B^{-1}P_1 = P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{又 } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

利用比值公式， $\theta_2 = \min\{6, 4, -, -\} = 4$ 得知 s_2 為退出變數，新的基本可行解為 $x_b = (s_1, x_1, s_3, s_4)$, $x_n = (s_2, x_2)$ 。計算新的基底逆矩陣。由於

$$\zeta = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

及

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $B_{new}^{-1} = E \cdot B^{-1} =$

令 $B^{-1} = B_{new}^{-1}$ ，則新的基本變數為：

$$x_b = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

目標函數值為：

$$z = c_b B^{-1}b = [0, 3, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 12$$

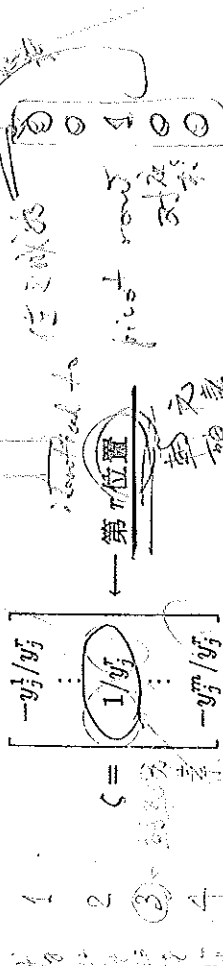
在進行重複 2 之前，必須說明步驟 3 及步驟 4 的部份可以利用部份單體表來進行。即祇取單體表中基本變數及右側值之部份來進行求解，當決定進入變數為 x_1 及進入行之係數後，置於單體表右側，

basic	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS	x_1	比值
z	0	0	0	0	0	-3	6
s_1	1	0	0	0	6	1	② 4
s_2	0	1	0	0	8	-1	-
s_3	0	0	1	0	1	-1	-
s_4	0	0	0	1	2	0	-

即可在表上進行比值檢驗，決定退出變數，並用高斯消去法得出新的 B^{-1} 及其基本可行解的基本變數和目標函數值，如下所示。

basic	s_1	s_2	s_3	s_4	RHS
z	0	3/2	0	0	12
s_1	1	-1/2	0	0	2
x_1	0	1/2	0	0	4
s_3	0	1/2	1	0	5
s_4	0	0	0	1	2

其中 $E = [e_1, e_2, \dots, e_{r-1}, \zeta, e_{r+1}, \dots, e_m]$ ，以及



向量 ζ 是依據高斯消去法在進入行 y_j 運算所產生的，其結果可看出，在向量 y_j 中將第 r 位置的係數， y_j^r ，以倒數表示，其餘之係數則乘以該倒數，同時改變其正負號，即構成向量 ζ 。當得出新的基本可行解的基底逆矩陣，即可計算其基本變數及目標函數值，然後返回步驟 2。

接著以下的例子來說明修正單體法之計算過程。

例 2.7

以修正單體法求解下列線性規劃問題：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{subject to } & x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

解答：

首先將此一線性規劃模式轉成標準形式如下：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\ \text{subject to } & x_1 + 2x_2 + s_1 = 6 \\ & 2x_1 + x_2 + s_2 = 8 \\ & -x_1 + x_2 + s_3 = 1 \\ & x_2 + s_4 = 2 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{aligned}$$

重覆 1：

取基本變數為 $x_3 = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ ，非基本變數為 $x_n = (x_1, x_2)$ ，其在目標函數的係數分別為 $c_3 = (0, 0, 0, 0)$ ， $c_n = (3, 2)$ ，在限制式的係數矩陣分別為

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

及

$$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

又

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6]$$

首先探討偶題的形成，任何一個線性規劃問題的偶題之列題方式完全視該線性規劃問題中的目標函數之準則，限制式的型態，以及變數的正負數限制等種種變異而定，為簡化此一推導過程俾能掌握幾個要訣，迅速準確地導出任何一種線性規劃問題之偶題，吾人通常先將線性規劃問題轉換成標準形式，如下所示：

原題：

$$\begin{aligned} \text{maximize/minimize } z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{subject to} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad y_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad y_2 \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad y_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

接著按照下面幾個要訣來進行：

要訣 1. 原題中每一個限制式，必定義一個偶題變數，而該偶題變數在目標函數中的係數，即為其對應限制式之右側值。

要訣 2. 原題中每一個變數，必對應一個偶題限制式，該偶題限制式之右側值，即為其對應變數在目標函數的係數。

要訣 3. 原題目標函數為極大化，則偶題目標函數必為極小化，且限制式為 $\geq$ 不等式；原題目標函數為極小化，則偶題目標函數必為極大化，且限制式為 $\leq$ 不等式。

要訣 4. 偶題之變數沒有正負數之限制。

因此，根據這些要訣，首先定義偶題之變數為 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ ，則偶題之列題方式為：

或是

$$\begin{aligned} \text{maximize } w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\ \text{subject to} \quad & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \leq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \leq c_2 \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \leq c_n \\ & y_1, y_2, \dots, y_m \text{ unrestricted} \end{aligned}$$

端視原題之目標函數是極大化或極小化而定。

例 2.8

求下列線性規劃問題之偶題

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解答：

首先轉成標準形式如下：

而且在此表中也可得出 $C_0 B^{-1} = (0, 3/2, 0, 0)$ ，以利下面求解。

重覆 2：

計算非基本變數 x_2 及 s_2 的 $z_j - c_j$ 值如下：

$$z_2 - c_2 = C_0 B^{-1} P_2 - c_2 = [0, 3/2, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = -1/2 < 0$$

$$z_4 - c_4 = [0, 3/2, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 3/2 > 0$$

顯示此一基本可行解並非最佳解，由於 x_2 的 $-(z_j - c_j)$ 為唯一正值，故選為進入變數，計算其進入行的係數

$$y_2 = B^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

將其置於部份單體表之右側，以進行退出變數之決定和新的基本可行解之計算。

由部份單體表中可得出新的基本可行解的基本變數為 $x_6 = (x_2, x_1, s_3, s_4) = (4/3, 10/3, 3, 2/3)$ ，目標函數值 $z = 38/3$ ，又 $C_0 B^{-1} = (1/3, 4/3, 0, 0)$ 。

重覆 3：

計算非基本變數 s_1 及 s_2 之 $z_j - c_j$ 值如下：

$$z_3 - c_3 = 1/3 > 0$$

$$z_4 - c_4 = 4/3 > 0$$

顯示此為最佳解。

2.4 對偶性及對偶單體法

茲將探討線性規劃中一個非常重要的特性，即對偶性 (duality)。其源自於一個事實，即吾人所求解的每一個線性規劃問題，都隱含地存在另一個所屬的線性規劃問題。通常吾人稱原先求解的線性規劃問題為原題 (the primal problem)，而稱其所屬的另一線性規劃問題為偶題 (the dual problem)。此一偶題的存在與其特性不僅提供一些非常重要的訊息來解釋原題最佳解之意義，而且作為敏感度分析和參數分析的基礎，同時可發展出兩種新的演算法，即對偶單體法及原偶題演算法 (the primal-dual method)。

$$\begin{aligned}
 \text{maximize } z &= 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\
 \text{subject to } & x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 10 \\
 & -x_1 + 2x_2 + x_3 - s_2 = 2 \\
 & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\
 & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

令偶題變數為 $y = (y_1, y_2, y_3)$ ，則偶題之形式為

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } w &= 10y_1 + 2y_2 + 8y_3 \\
 \text{subject to } & y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 3 \\
 & 2y_1 + 2y_2 - y_3 \geq -1 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\
 & y_1 \geq 0 \\
 & -y_2 \geq 0 \\
 & y_1, y_2, y_3 \text{ unrestricted}
 \end{aligned}$$

進而再將限制式的部份加以調整，如下所示：

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } w &= 10y_1 + 2y_2 + 8y_3 \\
 \text{subject to } & y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 3 \\
 & -2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \\
 & y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \\
 & y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ unrestricted}
 \end{aligned}$$

例 2.9

尋出下列線性規劃問題之偶題：

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } z &= 5x_1 + 2x_2 \\
 \text{subject to } & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & 3x_1 + 4x_2 \leq 10 \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \text{ unrestricted}
 \end{aligned}$$

解答：

首先轉成標準形式如下：

$$\begin{aligned}
 \text{minimize } z &= 5x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 0s_1 + 0s_2 \\
 \text{subject to } & 2x_1 + x_2' - x_2'' - s_1 = 3 \\
 & 3x_1 + 4x_2' - 4x_2'' + s_2 = 10 \\
 & x_1, x_2', x_2'', s_1, s_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

令偶題變數為 $y = (y_1, y_2)$ ，則偶題之形式為

$$\begin{aligned}
 \text{maximize } w &= 3y_1 + 10y_2 \\
 \text{subject to } & 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\
 & y_1 + 4y_2 \leq 2 \\
 & -y_1 - 4y_2 \leq -2 \\
 & -y_1 \leq 0 \\
 & y_2 \leq 0 \\
 & y_1, y_2 \text{ unrestricted}
 \end{aligned}$$

進而再將限制式部份加以調整，其中 $y_1 + 4y_2 \leq 2$ 及 $-y_1 - 4y_2 \leq -2$ 可合併成 $y_1 + 4y_2 = 2$ ，故得出

$$\begin{aligned}
 \text{maximize } w &= 3y_1 + 10y_2 \\
 \text{subject to } & 2y_1 + 3y_2 \leq 5 \\
 & y_1 + 4y_2 = 2 \\
 & y_1 \geq 0, y_2 \leq 0
 \end{aligned}$$

接著探討偶題的特性，特別是關於偶題與原題的關聯性：
特性 1. 就某一個線性規劃問題及偶題，分別各取任何一個基本可行解，則其目標函數值，必有下列大小之關係：

(極大化問題之目標函數值 $\leq$ 極小化問題之目標函數值)

特性 2. 就某一個線性規劃問題及其偶題，分別各取一個基本可行解，若此對基本可行解的目標函數值相等，則必為原來線性規劃問題及其偶題之最佳解。

特性 3. 就某一個線性規劃問題及其偶題，若其中一個問題得出一最佳解，則可以確定此兩個問題必擁有最佳解，且其目標函數值相等。

特性 4. 就某一線性規劃問題及其偶題，則下列三種關係中必只有一種成立：

1. 兩個問題擁有最佳解，其目標函數值相等。
2. 若其中一個問題是無限值的解，則另一個問題無解。
3. 兩個問題皆無解。

為說明上面所提及之關聯性，令原題的模式為：

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= cx \\ \text{subject to } Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

則其偶題為

$$\begin{aligned} \text{minimize } w &= yb \\ \text{subject to } yA &\geq c \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

假定 x_0 及 y_0 分別為原題和偶題之任何基本可行解，則 $Ax_0 \leq b$ ， $x_0 \geq 0$ ， $y_0A \geq c$ ，及 $y_0 \geq 0$ 必成立。將 x_0 由右側乘進 $y_0A \geq c$ 之兩側，而將 y_0 由左側乘進 $Ax_0 \leq b$ 之兩側，得出 $y_0Ax_0 \geq cx_0$ 及 $y_0Ax_0 \leq y_0b$ ，因此乃獲得 $cx_0 \leq y_0Ax_0 \leq y_0b$ 或是 $cx_0 = y_0b = w_0$ ，此一關係可用來說明特性 1 的涵義，此種特性又稱為弱對偶性 (weak duality property)。

其次說明特性 2，即若 $cx_0 = y_0b$ ，則 x_0 為原題最佳解及 y_0 為偶題最佳解。令 x 為原題之一基本可行解，由特性 1 得知 $cx \leq y_0b$ ，但又知道 $cx_0 = y_0b$ ，因此顯示原題中任一基本可行解都符合 $cx \leq cx_0$ ，故 x_0 為原題最佳解。依同理可以說明 y_0 亦為偶題之最佳解。

接著說明特性 3 之內涵。假定原題存在一最佳解 x^* ， x_b 為其基變數， B^{-1} 為其基底之逆矩陣，而 c_b 為其在目標函數之係數。則可知 $x_b = B^{-1}b$ ， $z = c_b B^{-1}b$ ，根據最佳解條件之關係式 $c_b B^{-1}A - c > 0$ 顯

示，若令 $y = c_b B^{-1}$ ，則 y 必為偶題之基本可行解，而且 $y = c_b B^{-1}$ 為偶題之最佳解。此一特性又稱為強對偶性 (strong duality property)。

至於第 4 個特性在陳述線性規劃問題具有特殊解之情形，這可以由原題與偶題目標函數值之關係式加以瞭解，如果其中一個問題是無解，則另一個問題可能是無解或無限值的解。

由這些特性，吾人可以進一步發展出兩個定理，即互補差餘定理 (complementary slackness theorem) 及 KKT 定理 (Karush-Kuhn-Tucker theorem, KKT theorem)。

定理 2.1 互補差餘定理

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 和 $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ 為某線性規劃問題及其偶題之一對基本可行解，若且唯若下列關係式成立，則 x 和 y 分別為原題和偶題之最佳解：

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

換言之，

$$1. \text{ 若 } x_j > 0, \text{ 則 } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j \quad j = 1, \dots, n;$$

$$2. \text{ 若 } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \neq c_j, \text{ 則 } x_j = 0 \quad j = 1, \dots, n;$$

$$3. \text{ 若 } y_i > 0, \text{ 則 } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1, \dots, m;$$

$$4. \text{ 若 } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \neq b_i, \text{ 則 } y_i = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

定理 2.2 KKT 最佳化定理

就某一線性規劃問題：

$$\begin{aligned} & \text{maximize } z = cx \\ & \text{subject to } Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

若存在一對變數值 x^* 及 y^* 而滿足下列三個條件：

1. $Ax^* \leq b, x^* \geq 0$
2. $y^*A \geq c, y^* \geq 0$
3. $y^*(b - Ax^*) = 0, (y^*A - c)x^* = 0$,

則 x^* 必為原題之最佳解， y^* 必為偶題之最佳解。其中條件 1 稱為原題可行性 (primal feasibility)，條件 2 稱為偶題可行性 (dual feasibility)，而條件 3 稱為互補差餘性 (complementary slackness)。

其次來探討偶題的意義。由上面得知，若 x^* 為原題的最佳解，其基本變數為 x_b ，而 x_b 在目標函數的係數為 c_b ，在限制式的基底為 B ，則 $x_b = B^{-1}b$ 和 $z = c_b B^{-1}b$ 。又根據目標函數的公式

$$z^* = c_b B^{-1}b - \sum_{j \in nb} (z_j - c_j)x_j \text{ 以及 } y^* = c_b B^{-1}$$

得知

$$z^* = y^*b - \sum_{j \in nb} (z_j - c_j)x_j。$$

將此一目標函數對 b_i 取偏微分，則得出

$$\partial z^* / \partial b_i = y_i^* \quad i = 1, \dots, m$$

顯示偶題變數 y_i^* 是代表某限制式右側值 i 增加一單位時，最佳解目標函數的改變數量。

依經濟的觀點，吾人可以視 y_i^* 表某限制資源 i 的隱價 (shadow price) 或所擁有之價值 (imputed value)。假定原題是一種生產規劃的問題，欲生產 n 種產品，而需要 m 種資源，其中 x_j 代表產品 j 的生產數量， b_i 代表資源 i 的供應數量， c_j 代表產品 j 的單位利潤，而 a_{ij} 代表生產產品 j 一單位所需要的資源 i 之數量。則偶題限制式 $\sum_{j=1}^n a_{ij}y_i \geq c_j$ 這些所投入某產品 i 的資源價值，如果應用在其他用途，至少必須超過其用於生產所獲得之利潤 c_j 。然而為維持一種公平競爭的價格，並保證獲得利潤，則偶題之目標函數需將這些應用在其他用途的資源總價值施予極小化。根據所提出的對偶性，這種應用在其他用途的資源總價值應該等於用於生產所獲得的最大利潤。再根據互補差餘定理，如果用於生產的資源 i 並沒有全部耗盡，即 $b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j > 0$ 則該資源 i 的邊際價值 $y_i = 0$ 。同樣地，如果生產某產品 j 所付出的資源成本超過其單位利潤，即則該產品沒有生產的利潤可言，因此 $x_j = 0$ 。

關於上面所討論的原題與偶題的關係，吾人亦可以利用單體表來說明，假定原題的標準形式為：

$$\begin{aligned} & \text{maximize } z = cx + 0s \\ & \text{subject to } Ax + Is = b \\ & \quad x, s \geq 0 \end{aligned}$$

其中 s 包含管變數和人工變數，其偶題為：

$$\begin{aligned} & \text{minimize } w = yb + 0v \\ & \text{subject to } yA - Iv = c \\ & \quad y, v \geq 0 \end{aligned}$$

假定 x 為原題的一個基本可行解，其基本變數設為 x_b ， x_b 在目標函數的係數為 c_b ，在限制式的基底為 B ，則其單體表應為：

basic	$x_1 \dots x_j \dots x_n$	$s_1 \dots s_i \dots s_m$	RHS
z	$v_1 \dots v_j \dots v_n$	$y_1 \dots y_i \dots y_m$	$c_b B^{-1}b$
x_b	$B^{-1}A$	B^{-1}	$B^{-1}b$

從此單體表可以看出 $x_b = B^{-1}b$, $z = c_b B^{-1}b = w$, $v_j = z_j - c_j$, $j = 1, \dots, n$, $y_i = c_i B_i^{-1}$, $i = 1, \dots, m$ 。而且

若 $x_j > 0$, 則 $v_j = 0$, $j = 1, \dots, n$

若 $v_j > 0$, 則 $x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$

若 $y_i > 0$, 則 $s_i = 0$, $i = 1, \dots, m$

若 $s_i > 0$, 則 $y_i = 0$, $i = 1, \dots, m$ 。

茲以下面的一個線性規劃的例子來說明。

例 2.10

設原題線性規劃模式為：

$$\begin{aligned}
 &\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 \\
 &\text{subject to} \quad \begin{aligned}
 &x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 43 \\
 &3x_1 + 0x_2 + 2x_3 + s_2 = 46 \\
 &x_1 + 4x_2 + 0x_3 + s_3 = 42
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

利用單體表的計算過程來說明原題與偶題的關係。

解答：

其偶題模式為：

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize } w = 43y_1 + 46y_2 + 42y_3 + 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 \\
 &\text{subject to} \quad \begin{aligned}
 &y_1 + 3y_2 + y_3 - v_1 = 3 \\
 &2y_1 + 0y_2 + 4y_3 - v_2 = 2 \\
 &y_1 + 2y_2 + 0y_3 - v_3 = 5
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2, y_3, v_1, v_2, v_3 \geq 0$$

利用單體法求解原題，得出下列的結果

重覆 1:

basic	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	-3	-2	-5	0	0	0	0
s_1	1	2	1	1	0	0	43
s_2	3	0	2	0	1	0	46
s_3	1	4	0	0	0	1	42

任何 direction

得出: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 0, 43, 46, 42)$, $z = 0$

$(v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3) = (-3, -2, -5, 0, 0, 0)$, $w = 0$

重覆 2:

basic	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	9/2	-2	0	0	5/2	0	115
s_1	-1/2	2	0	1	-1/2	0	20
s_2	3/2	0	1	0	1/2	0	23
s_3	1	4	0	0	0	1	42

得出: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 23, 20, 0, 42)$, $z = 115$

$(v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3) = (9/2, -2, 0, 0, 5/2, 0)$, $w = 115$

重覆 3:

basic	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	RHS
z	4	0	0	1	2	0	135
x_1	-1/4	1	0	1/2	-1/4	0	10
x_2	3/2	0	1	0	1/2	0	23
s_3	2	0	0	-2	1	1	2

得出: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (0, 10, 23, 0, 0, 2)$, $z = 135$

$(v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3) = (4, 0, 0, 1, 2, 0)$, $w = 135$

由於原題之可行性成立，偶題之可行性成立，再加上互補差餘條件亦成立，故為最佳解。

(dual simplex)

最後介紹對偶單體法。對偶單體法的構想，簡單地說，即在原體的單體表中利用單體法求解其偶題。對一些線性規劃的問題，往往因其限制式不含階變數，如果不想利用人工變數，就不易找出一個基本可行解。如果這種線性規劃問題能先使偶題可行解條件成立，而無法要求所得出的原題解為可行，則可以利用對偶單體法快速的解出該線性規劃問題之最佳解。

茲將對偶單體法的演算步驟敘述如下：

步驟 0：將線性規劃問題轉成標準形式，找出一個偶題為可行，即 $z_j - c_j \geq 0$ (極大化) 或 $z_j - c_j \leq 0$ (極小化)，但原題不一定可行的基本解。

步驟 1：如果該基本解符合原題可行性，則為最佳解；否則挑選右側值中負數值最小的限制式，作為樞軸列，即 $\bar{b}_r = \min\{\bar{b}_i\}$ ，而其所屬之基本變數為退出變數， x_{br} 。

步驟 2：若樞軸列中的係數全部是非負數，則表示偶題解是屬於無限值，而原題為無解。否則就利用下列的比值公式來決定進入變數， x_k ：如果是極大化情況，則

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \mid y_{rj} < 0 \right\}$$

如果是極小化情況，則

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min_j \left\{ \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \mid y_{rj} < 0 \right\}$$

步驟 3：利用高斯消去法計算新的基本解，返回步驟 1。

茲以下面一個例子來說明對偶單體法。

例 2.11

利用對偶單體法求解下面線性規劃問題：

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{subject to } &x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ &x_1, x - 2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解答：

首先將此一線性規劃問題轉成標準形式：

$$\begin{aligned} \text{minimize } z &= 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\ \text{subject to } &x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 = 3 \\ &2x_1 - x_2 + 3x_3 - s_2 = 4 \\ &x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

根據此一標準形式，吾人可以得出一個基本解，其偶題是可行，但原題不可行，即 $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (0, 0, 0, -3, -4)$ 經由下列的單體表，利用對偶單體法乃得出其最佳解。

basic	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	-2	-3	-4	0	0	0
s_1	-1	-2	-1	1	0	-3
s_2	-2	1	-3	0	1	-4
z	0	-4	-1	0	-1	4
s_1	0	-5/2	1/2	1	-1/2	-1
x_1	1	-1/2	3/2	0	-1/2	2
z	0	0	-9/5	-8/5	-1/2	28/5
x_2	0	1	-1/5	-2/5	1/5	2/5
x_1	1	0	7/2	-1/5	-2/5	11/5

由於 $(x_2, x_1) = (2/5, 11/5)$ 以及所有的 $z_j - c_j \leq 0$ ，因此

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, s_1^*, s_2^*) = (11/5, 2/5, 0, 0, 0)$$

$$(v_1^*, v_2^*, v_3^*, y_1^*, y_2^*) = (0, 0, 9/5, 8/5, 1/5)$$

由此單體表得知基本變數為 $x_6 = (x_2, x_1, x_5, x_6) = (4/3, 10/3, 3, 2/3)$

，其在目標函數的係數為 $c_b = (2, 3, 0, 0)$ ，偶題變數值為 $y_1 = 152$ 。

$(y_1, y_2, y_3, y_4) = (1/3, 4/3, 0, 0) = c_b B^{-1}$ ，其基底為：

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{以及 } b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

接著探討下面六種不同情況之敏感度分析方法：

1. 目標函數的係數變動時，即變動 c 值。此時受到影響的是 BASIC

$$z_j - c_j = c_b B^{-1} P_j - c_j \quad \text{以及 } z = c_b B^{-1} b$$

亦即最佳條件受到影響，因此首先要重新計算非基本變數之各種 $z_j - c_j$ 值，來判斷最佳條件是否仍然成立，如果最佳條件仍然成立，則原來的基本變數值不變，但目標函數值要重新計算。

如果最佳條件不成立，則在單體表中應以新的 $z_j - c_j$ 值取代原來的 $z_j - c_j$ 值，新的目標函數值 $z = c_b B^{-1} b$ 取代原來的目標函數值，然後利用單體法找出新的最佳解。

✓ 例如原來的 $z = 3x_1 + 2x_2$ 變為 $z = 4x_1 + x_2$ ，則計算非基本變數

x_3 及 x_4 的 $z_j - c_j$ 值如下：

$$z_3 - c_3 = c_b B^{-1} P_3 - c_3$$

$$= (1, 4, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -2/3$$

$$z_4 - c_4 = c_b B^{-1} P_4 - c_4$$

$$= (1, 4, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 2/3$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 + 2 = 1 > 0$$

x_b 不變

$$z_j - c_j b = (1, 4, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 7/3$$

由於 $z_3 - c_3 = -2/3 < 0$ ，故顯示最佳條件不成立，需要修改原先的最佳解，此時先計算

$$z = c_b B^{-1} b = (-2/3, 7/3, 0, 0) \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 44/3$$

接著在最佳解的單體表中以所計算出的 $z_j - c_j$ 值和 z 值分別取代原來的數值，再利用單體法求得新的最佳解，如下所示

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	-2/3	7/3	0	0	44/3
x_2	0	1	(2/3)	-1/3	0	0	4/3
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3
z	0	1	0	2	0	0	16
x_3	0	3/2	1	-1/3	0	0	2
x_1	1	1/2	0	1/2	0	0	4
x_5	0	3/2	0	1/2	1	0	5
x_6	0	1	0	0	0	1	2

最佳解

2. 限制式的右側值修改時，即修改 b 值。此時受到影響的是基本變

數的計算公式 $x_b = B^{-1} b$ 及目標函數值的計算公式 $z = c_b B^{-1} b$ ，

亦即最佳解之可行性會受到影響。因此，首先要重新計算基本變

數 $x_b = B^{-1} b$ 的值，來判斷最佳解之可行性是否仍然成立，如果

$x_b = B^{-1} b$ 的值都是非負數，則表示 $x_b = B^{-1} b$ 為最佳解的基本變

分別為原題及偶題之最佳解。

事實上，對偶單體法是利用偶題的基本可行解為起點，在原題的單體表中，以單體法達到偶題之最佳解條件；換言之，原題之最佳解條件即為偶題基本解之可行條件，而原題基本解之可行條件即為偶題之最佳解條件。

2.5 敏感度分析

敏感度分析旨在測試線性規劃問題中的各種係數或右側值，在得出最佳解之後，如果加以改變的話，將會影響最佳解的程度。在實際應用線性規劃來解決問題時，常常會遭遇到問題所需要的一些數據不易掌握或有所變動。因此有必要在該問題的某些係數值改變時，能夠不需要再重新求解新的問題，而僅重敏感度分析的方法，很快得出新的最佳解。

敏感度分析方法也可應用在其他的狀況，例如當吾人建立線性規劃模式時，所考慮的因素不充足，則可以利用敏感度分析的方法來涵蓋一些新的因素；又如線性規劃模式中的限制式不夠嚴謹，有必要加入新的限制式時，此時亦可利用敏感度分析方法來測試這些新的限制式，而不需要重新求解問題。簡言之，當某線性規劃問題中，出現下面幾種變化的情況時，可以利用敏感度分析方法來測試其影響程度；並得出其最佳解，勿需重新求解問題：

1. 目標函數的係數變動時，
2. 限制式的右側值變動時，
3. 目標函數的係數及限制式的右側值同時變動時，
4. 增加一個決策變數時，
5. 增加一個限制式時，
6. 限制式的係數變動時。

敏感度分析的構想可以從線性規劃最佳解的單體表中，所呈現的計算公式來加以了解。茲給予一個標準形式之線性規劃模式：

$$\text{maximize } z = cx + 0s$$

$$\text{subject to } Ax + Is = b$$

$$x, s \geq 0$$

假定其最佳解之基本變數為 x_b ，而其所屬的目標函數之係數為 c_b ，其基底為 B ，則最佳解之單體表可陳述如下：

basic	x_b	s	RHS
z	$c_b B^{-1} A - c$	$c_b B^{-1}$	$c_b B^{-1} b$
x_b	$B^{-1} A$	B^{-1}	$B^{-1} b$

$z - c_b B^{-1} A - c$	$c_b B^{-1}$	$c_b B^{-1} b$	RHS
A	$B^{-1} A$	$B^{-1} b$	b

根據此一單體表中的各種計算式，可以看出模式中某一項係數變動時所造成的影響，進而加以測試與修改，其中所造成的影響是指關係到最佳解條件和可行性條件為主。為說明敏感度分析如何處理上面所提的各種情況，乃以下面的線性規劃問題為例。

$$\text{maximize } z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + x_5 = 1$$

$$-x_1 + x_6 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

其最佳解之單體表為：

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3
x_2	0	1	2/3	-1/3	0	0	4/3
x_1	1	0	-1/3	2/3	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	-2/3	1/3	0	1	2/3

數而 $z = c_b B^{-1}b$ 為目標函數值。如果 $x_b = B^{-1}b$ 的值中有負數者，表示最佳解的可行性不成立，則需要尋找新的最佳解。此時應以新的 $x_b = B^{-1}b$ 值及 $z = c_b B^{-1}b$ 值分別取代原來的值，然後利用對偶單體法求解。

例如原來限制式的右側值修改為 $b = (7, 8, 1, 2)^T$ 。首先計算基本變數的值，

$$x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由於 x_b 的值皆為非負數，因此最佳解的基本變數為

$$x_b = (x_2, x_1, x_5, x_6) = (2, 3, 2, 0)$$

而目標函數值為

$$z = cB^{-1}b = (2, 3, 0, 0) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 13$$

又如原來限制式的右側值修改為 $b = (7, 4, 1, 2)^T$ 。首先計算基本變數的值，

$$x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

由於 x_b 的值中出現有負數者，因此原來最佳解的可行性已不成立

，此時先計算，

$$z = cB^{-1}b = (2, 3, 0, 0) \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix} = 23/3$$

將所計算的 $x_b = B^{-1}b$ 及 $z = c_b B^{-1}b$ 值分別取代單體表中的右側值和 z 值，再利用對偶單體法求出最佳解，如下所示。

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$23/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$10/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$1/3$
x_5	0	0	-1	1	1	0	-2
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$4/3$
z	0	0	0	$5/3$	$1/3$	0	7
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	2
x_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	1
x_3	0	0	1	-1	-1	0	2
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	0

3. 目標函數的係數及限制式右側值同時修改時，即修改 c 及 b 值。會受影響的是計算非基本變數的 $z_j - c_j = c_b B^{-1}P_j - c_j$ ，基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ ，以及目標函數 $z = c_b B^{-1}b$ ，亦即最佳解條件和可行性同時受到影響。因此要重新計算非基本變數的 $z_j - c_j$ 值和基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 值，用來判斷原來的最佳解條件以及可行性是否成立，這可分成四種不同情況：

Case 1. 如果所計算的非基本變數之 $z_j - c_j$ 值顯示最佳解條件仍然成立，以及基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 皆為非負數值，則表示 $x_b = B^{-1}b$ 為最佳解，而 $z = c_b B^{-1}b$ 為目標函數值。

4. 種不同之

Case 2. 如果所計算的非基本變數之 $z_j - c_j$ 值顯示最佳解條件仍然成立，以及基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 皆為非負數值，則表示 $x_b = B^{-1}b$ 為最佳解，而 $z = c_b B^{-1}b$ 為目標函數值。

B. 如果所計算的非基本變數之 $z_j - c_j$ 值顯示最佳解條件不成立，但基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 皆為非負數值，則表示要利用單體法來修正最佳解。此時，先要以新的 $z_j - c_j$ 值， $x_b = B^{-1}b$ 值，以及 $z = c_b B^{-1}b$ 值分別取代單體表中原有的值，再利用單體法求解。

C. 如果所計算的非基本變數之 $z_j - c_j$ 值顯示最佳解條件成立，而基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 值中有負數者，則表示要利用對偶單體法來修正最佳解。此時先要以新的 $z_j - c_j$ 值， $x_b = B^{-1}b$ 值，以及 $z = c_b B^{-1}b$ 值分別取代單體表中原有的值，再利用對偶單體法求解。

D. 如果所計算的非基本變數之 $z_j - c_j$ 值顯示最佳解條件不成立，且基本變數的 $x_b = B^{-1}b$ 值中有負數者，則表示要利用單體法及對偶單體法來修正最佳解。此時，先要以新的 $z_j - c_j$ 值， $x_b = B^{-1}b$ 值，以及 $z = c_b B^{-1}b$ 值分別取代單體表中原有的值，接著利用單體法使最佳解條件成立，如果可行性依然不成立，再利用對偶單體法求解。例如目標函數的係數修改為 $z = x_1 + 4x_2$ ，同時限制式的右側值修改為 $b = (7, 4, 1, 2)^t$ 。首先計算非基本變數的 $z_j - c_j$ 值如下，

$$z_3 - c_3 = c_b B^{-1}P_3 - c_3$$

$$= (4, 1, 0, 0) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$= 7/3$$

$$z_4 - c_4 = c_b B^{-1}P_4 - c_4$$

$$= (4, 1, 0, 0) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$= -2/3$$

再計算 $x_b = B^{-1}b$ 值如下，

$$x_b = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

由於 $z_4 - c_4$ 值為負數，且 x_b 值中有負數，顯示原來最佳解條件及可行性已不成立，此時先計算

$$z = c_b B^{-1}b = (4, 1, 0, 0) \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 41/3$$

然後將所計算的 $z_j - c_j$ 值，和 z 值分別取代單體表中的舊值，先後利用單體法和對偶單體法來求解，如下所示。

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	$7/3$	$-2/3$	0	0	$41/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$10/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$(2/3)$	0	0	$1/3$
x_5	0	0	-1	1	1	0	-2
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$-4/3$
z	0	0	2	0	0	0	14
x_2	$1/2$	1	$1/2$	0	0	0	$7/2$
x_4	$3/2$	0	$-1/2$	1	0	0	$1/2$
x_5	$(-3/2)$	0	$-1/2$	0	1	0	$-5/2$
x_6	$-1/2$	0	$-1/2$	0	0	1	$-3/2$
z	0	0	$5/3$	0	$2/3$	0	$37/3$
x_2	0	1	$1/3$	0	$1/3$	0	$8/3$
x_4	0	0	(-1)	1	1	0	-2
x_1	1	0	$1/3$	0	$-2/3$	0	$5/3$
x_5	0	0	$-1/3$	0	$-1/3$	1	$-2/3$
z	0	0	0	$5/3$	$7/3$	0	9
x_2	0	1	0	$1/3$	$2/3$	0	2
x_3	0	0	1	-1	-1	0	2
x_1	1	0	0	$1/3$	$-1/3$	0	1
x_6	0	0	0	$-1/3$	$-2/3$	1	0

4. 增加一個決策變數 x_k 時。往往在建立線性規劃模式時，有些因素沒有考慮到，而在求得最佳解後，才發現需要增加新的變數。假定新的變數為 x_k ，其在目標函數的係數為 c_k 而在限制式的係數向量為 P_k 。此時可以計算該變數的 $z_k - c_k = c_0 B^{-1} P_k - c_k$ 值來判段目前的解是否需要修正以容納此一新的變數，或利用其對應的偶題限制式來判斷。如果所計算出的 $z_k - c_k$ 值符合最佳解條件，則表示該新的變數應為非基本變數；反之，如果所計算出的 $z_k - c_k$ 值不符合最佳解條件，則表示新的變數 x_k 應為基本變數，而需要修正最佳解。此時，先要計算 x_k 的進入行係數 $y_k = B^{-1} P_k$ ，在單體表中騰出一行來安置 x_k 的 $z_k - c_k$ 值和 y_k 值，然後利用單體法求

解。

例如原來線性規劃的模式中新增變數 x_7 ，而成為：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + 3/2x_7 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3/4x_7 \leq 6 \\ & 2x_1 + x_2 + 3/4x_7 \leq 8 \\ & -x_1 + x_2 - x_7 \leq 1 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_7 \geq 0 \end{aligned}$$

首先計算 x_7 的 $z_7 - c_7$ ，

$$\begin{aligned} z_7 - c_7 &= c_0 B^{-1} P_7 - c_7 \\ &= (1/3, 4/3, 0, 0) \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3/2 \\ &= -1/4 \end{aligned}$$

由於 $z_7 - c_7 < 0$ 表示 x_7 應為基本變數，則先計算其進入行的係數

$$y_7 = B^{-1} P_7 = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

再將 $z_7 - c_7$ 及 y_7 放入單體表中，利用單體法求解如下：

只增加這一 column
 1/4
 simplex

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	$1/4$	$4/3$	0	0	38/3
x_2	0	1	$1/4$	$-1/3$	0	0	4/3
x_1	1	0	$1/3$	$2/3$	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	2/3
z	0	1	0	1	0	0	14
x_3	0	4	1	$8/3$	$-4/3$	0	16/3
x_1	1	-1	0	-1	1	0	2
x_5	0	4	0	$5/3$	$-1/3$	1	25/3
x_6	0	1	0	0	0	0	2

5. 增加新的限制式。有時所建立的線性規劃模式，因為考慮不周詳，而在求得最佳解之後，才發現需要增加新的限制式。如果所得的最佳解能夠滿足新的限制式，則表示新的限制式是多餘的；反之，如果無法滿足新的限制式，則表示需要修改最佳解。此時，先要將新的限制式轉成等式，如果含有情變數或剩餘變數，就以情變數或剩餘變數為該限制式之基本變數；如果不含有情變數或剩餘變數，則再引進人工變數來當基本變數。然後將此一限制式放置於單體表中最後一列，接著利用高斯消去法修正此一限制式，使其符合典型的單體表形式，再利用對偶單體法來求解。

例如原來的線性規劃問題中需要一個新的限制式 $x_1 \leq 3$ 。經利用最佳解測試發現，由於 $x_1 = 10/3$ 和 $x_2 = 4/3$ 不能滿足此一新的限制式，因此，要修正此一最佳解。首先，將此限制式轉成等式： $x_1 + x_7 = 3$ ， $x_7 \geq 0$ 將其置於單體表中最後一列，先利用高斯消去法，修正此一限制式，再利用對偶單體法求出最佳解。

最後一列

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	0	38/3
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	0	4/3
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	0	3
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	0	2/3
x_7	1	0	0	0	0	0	1	3
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	0	38/3
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	0	4/3
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	0	3
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	0	2/3
x_7	0	0	$1/3$	$-2/3$	0	0	1	$-1/3$
z	0	0	1	0	0	0	2	12
x_2	0	1	$1/2$	0	0	0	$-1/2$	3/2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	3
x_5	0	0	$-1/2$	0	1	0	3/2	5/2
x_6	0	0	$-1/2$	0	0	1	1/2	1/2
x_4	0	0	$-1/2$	1	0	0	$-3/2$	1/2

再 dual simplex

6. 限制式的係數修改時。這可分成兩種情況來討論：simplex

- 其一、如果是限制式中某一行的係數修改時，則可以將修改的一行當作新變數的一行，計算新行的 $z_j - c_j$ 值及 y_j 值，以取代原來的一行，然後利用單體法來處理。
- 其二、如果是限制式中某一列的係數修改時，則可以將修改的一列當新的限制式，置於單體表中。又如果該列的情變數是基本變數，則直接從單體表中刪除該列的係數；如果該列的情變數是非基本變數，則令該情變數為進入變數，修改單體表，使之成為基本變數，再從單體表中加以刪除，然後放置新的一列，按照上面所討論加入新限制式之方法來進行。

如及理 4

inductive

例 2.12

假定原來線性規劃中的變數 x_2 在限制式的係數修改成

$$P_2 = (3/2, 1/2, 1, 1)^T$$

請問原來之最佳解受到何種影響？

解答：

首先計算 x_2 之 $z_2 - c_2$ ，

$$z_2 - c_2 = c_0 B^{-1} P_2 - c_2 = (1/3, 4/3, 0, 0) \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2$$

$$= -5/6$$

由於 $z_2 - c_2 = -5/6 < 0$ ，表示需要修正最佳解。因此，先計算 x_2 的進入係數向量 y_2 ，

$$y_2 = B^{-1} P_2 = \begin{bmatrix} 5/6 \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

將所計算的 $z_j - c_j$ 值和 y_2 值取代單體表原來 x_2 的 $z_j - c_j$ 值和 y_2 值，然後利用單體法依 x_2 將置點的位置使最佳解條件成立，即得出新的最佳解，如下所示。

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	-5/6	1/3	4/3	0	0	38/3
x_2	0	(5/6)	2/3	-1/3	0	0	4/3
x_1	1	-1/6	-1/3	2/3	0	0	10/3
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	1/6	-2/3	1/3	0	1	2/3
z	0	0	1	1	0	0	14
x_2	0	1	4/5	-2/5	0	0	8/5 最佳解
x_1	1	0	-1/5	3/5	0	0	18/5
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	-4/5	2/5	0	1	2/5

例 2.13

假定原來線性規劃問題的限制式 $x_1 + 2x_2 \leq 6$ 改成 $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ ，請問原來之最佳解受到何種影響？

解答：

其方法是先將原有限制式之常變數 x_3 ，利用單體法促使成為基本變數，然後將修改的限制式轉成等式限制式之後在單體表中取代原來的限制式，然後按照前面所提到的方法，分別使用單體法及對偶單體法修正單體表而得出最佳解，其過程如下所示。

2.6 參數分析

參數分析方法 (parameter analysis) 是線性規劃中敏感度分析方法之延伸，其目的在探討模式中某些係數依某種比例作連續變異時，對最佳解所造成的影響。通常在參數分析方法，欲探討目標函數的係數或限制式右側值依一定的方向作變異時，其最佳解的變化情況。茲以下面的線性規劃問題來說明。

$$\begin{aligned} \text{maximize } z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to } &x_1 + x_2 \leq 6 \\ &-x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. 假定目標函數的係數依 $(1 - 2t, 3 - t)$ 之方向作變異， $t \geq 0$ 。當 $t = 0$ 時，其最佳解之單體表為

	basic	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z		0	0	$5/3$	$2/3$	14
x_1		1	0	$2/3$	$-1/3$	2
x_2		0	1	$1/3$	$1/3$	4

由此單體表得知：

$$x_b = (x_1, x_2) = (2, 4)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$c_b = (1 - 2t, 3 - t)$$

首先計算非基本變數 s_1 及 s_2 的 $z_j - c_j$ 值及目標函數值 z ：

$$\begin{aligned} \text{A/B } \checkmark \quad z_3 - c_3 &= c_3 B^{-1} P_3 - c_3 = 5/3 - 5/3t \\ \text{B/B } \checkmark \quad z_4 - c_4 &= c_4 B^{-1} P_4 - c_4 = 2/3 + 1/3t \\ z &= c_b B^{-1} b = 14 - 8t \end{aligned}$$

$$c_b = (1 - 2t, 3 - t)$$

basic	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
z	0	0	$1/3$	$4/3$	0	0	$38/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	0	0	$4/3$
x_1	1	0	$-1/3$	$2/3$	0	0	$10/3$
x_5	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-2/3$	$1/3$	0	1	$2/3$
z	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12
x_3	0	$3/2$	1	$-1/2$	0	0	2
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
x_6	0	1	0	0	0	1	2
z	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12
x_3	0	$3/2$	1	0	0	0	6
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	0	0	4
x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
x_6	0	1	0	0	0	1	2
z	0	$-1/2$	0	$3/2$	0	0	12
x_3	0	$1/2$	1	$-3/2$	0	0	-6
x_1	1	$1/2$	0	0	0	0	4
x_5	0	$3/2$	0	$1/2$	1	0	5
x_6	0	1	0	0	0	1	2
z	0	0	0	$3/2$	0	$1/2$	13
s_1	0	0	1	$-3/2$	0	$-1/2$	-7
x_1	1	0	0	0	0	$-1/2$	3
s_3	0	0	0	$1/2$	1	$-3/2$	2
x_2	0	1	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	6
s_2	0	0	$-2/3$	1	0	$1/3$	$14/3$
x_1	1	0	0	0	0	$-1/2$	3
s_3	0	0	$1/3$	0	1	$-5/3$	$-1/3$
x_2	0	1	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	6
s_2	0	0	$-3/5$	1	0	0	$23/5$
x_1	1	0	$1/6$	0	$-3/10$	0	$31/10$
s_4	0	0	$-1/5$	0	$-3/5$	0	$1/5$
x_2	0	1	$1/5$	0	$3/5$	1	$9/5$

最佳解

根據最佳解條件得知，如果 $x_3 = (x_1, x_2) = (2, 4)$ 仍然為最佳解，則 $z_3 - c_3 = 5/3 - 5/3t \geq 0$ 且 $z_4 - c_4 = 2/3 + 1/3t \geq 0$ 。換言之，在 $0 \leq t \leq 1$ 的範圍內，原來最佳解不變。當 $t > 1$ 時，由於 $z_3 - c_3$ 將為負數，最佳解條件不成立，需要修改最佳解。令 s_1 為進入變數，而 x_1 為退出變數。此時基本變數應為 $x_3 = (s_1, x_2)$ ，其 $c_3 = (0, 3-t)$ 而新的基底之 B^{-1} 計算如下：

$$\text{因為 } y_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \text{ 故得 } \zeta = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \text{ 而 } \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

因而得出

$$x_3 = (s_1, x_2) = B^{-1}b = (3, 3)$$

$$z = c_3 B^{-1}b = 9 - 3t$$

$$\text{以及 } [0, 3-t] \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C_3 B^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix}$$

同樣地，如果 $x_3 = (s_1, x_2) = (3, 3)$ 欲維持為最佳解，則必須

$$z_1 - c_1 = -5/2 + 5/2t \geq 0 \text{ 且 } z_4 - c_4 = 3/2 - 1/2t \geq 0 \text{ 換言之，}$$

$$\text{在 } 1 \leq t \leq 3 \text{ 的範圍內， } x_3 = (s_1, x_2) = (3, 3) \text{ 是為最佳解，而}$$

$$z = 9 - 3t$$

當 $t > 3$ 時，由於 $z_4 - c_4$ 將成為負數，最佳解條件不成立，需要修改最佳解，則選 s_2 為進入變數，計算 s_2 的進入行係數 y_4 ：

$$y_4 = B^{-1}P_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

根據比值得知 x_2 為退出變數，此時基本變數 $x_3 = (s_1, s_2)$ ，其 $c_3 = (0, 0)$ ，而新的基底之 B^{-1} 計算如下：

$$\text{因為 } y_4 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \text{ 故得 } \zeta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ 而}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因而得出

$$x_3 = (s_1, s_2) = B^{-1}b = (6, 6)$$

$$z = c_3 B^{-1}b = 0$$

以及

$$z_1 - c_1 = 5, \quad z_2 - c_2 = 0, \quad z_3 - c_3 = 0, \quad z_4 - c_4 = 0$$

$$\text{由於 } z_1 - c_1 = 5 \text{ 和 } z_2 - c_2 = 0 \text{ 都是大於或等於 } 0, \text{ 因此，顯示只}$$

$$\text{要 } t \geq 3, \quad x_3 = (s_1, s_2) = (6, 6) \text{ 必為最佳解。所以根據上面所進}$$

$$\text{行之參數分析，可以得出下面之結果：}$$

	t	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
$z =$ $\left[-\frac{2}{3}, \frac{t}{2} \right] - \left[-2, 7 \right]$	$0 \leq t \leq 1$	2	4	0	0	$14 - 8t$
	$1 \leq t \leq 3$	0	3	3	0	$9 - 3t$
	$3 \leq t$	0	0	6	6	0

2. 假定限制式右側值依 $b = (6-t, 6+t)^t$ 方向作變異 $t \geq 0$ 。當 $t = 0$ 時，其最佳解之單體表為：

basic	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	RHS
z	0	0	5/3	2/3	14
x ₁	1	0	2/3	-1/3	2
x ₂	0	1	1/3	1/3	4

由此一單體表得知

$$x = (x_1, x_2) = (2, 4)$$

$$c = (1, 3)$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 6-t \\ 6+t \end{bmatrix}$$

首先計算

$$x_b = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6-t \\ 6+t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-t \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$z = c_b B^{-1}b = 14 - t$$

根據所計算的結果得知，只要 $2-t \geq 0$ ， $x_b = (x_1, x_2)$ 一定為最佳解之基本變數，換言之， $0 \leq t \leq 2$ ，最佳解之基本變數為

$$x_b = (x_1, x_2) = (2-t, 4)，目標函數值為 $z = 14-t$ 。$$

如果 $t > 2$ ， $x_b = (x_1, x_2) = (2-t, 4)$ 出現負數，則可行性不成立，因此要修改最佳解。令 x_1 為退出變數，接著要決定進入變數，

首先知道非基本變數 s_1, s_2 之 $z_3 - c_3 = 5/3$ ， $z_4 - c_4 = 2/3$ ，而其進入行係數分別為 $[P_3, P_4] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ 根據對偶單體法之比值公式

得知 s_2 為進入變數。因此新的基本變數為 $x_b = (x_1, s_2)$ 而其對應之各項為：

$$c_b = (0, 3), y_4 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \zeta = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

故可計算出

$$x_b = \begin{bmatrix} s_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6-t \\ 6+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+3t \\ 6-t \end{bmatrix}$$

$$\text{和 } z = c_b B^{-1}b = 18 - 3t$$

顯示，只要 $-6+3t \geq 0$ 和 $6-t \geq 0$ ， $x_b = (s_2, x_2)$ 必定為最佳解之基本變數；換言之，在 $2 \leq t \leq 6$ 的範圍內，最佳解之基本變數為：

$$x_b = (s_2, x_2) = (-6+3t, 6-t)$$

目標函數值為 $z = 18 - 3t$ 。

Step 3 dual simplex

如果 $t > 6$ ，則 $x_b = (s_2, x_2) = (-6+3t, 6-t)$ 出現負數，可行性不成立，因此要修改最佳解。此時令 x_2 為退出變數，接著決定進入變數，首先要計算非基本變數 x_1 及 s_1 的 $z_j - c_j$ 值和進入行的係數

$$z_1 - c_1 = c_b B^{-1}P_1 - c_1 = 2 \quad (0, 3) \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 = 2$$

$$z_3 - c_3 = c_b B^{-1}P_3 - c_3 = 3$$

$$y_1 = B^{-1}P_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = B^{-1}P_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根據對偶單體法之比值公式，得知，由於 $[y_1, y_3] = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 無法

決定進入變數，因此判斷此時必不存在基本可行解，即當 $t > 6$ 時，原來的線性規劃問題必無解。綜合上面參數分析之結果得出：

t	x_1	x_2	s_1	s_2	z
$0 \leq t \leq 2$	$2-t$	4	0	0	$14-t$
$2 \leq t \leq 6$	0	$6-t$	0	$-6+3t$	$18-3t$
$6 < t$	無解				

2.7 總結

線性規劃是數學規劃中最主要的方法之一，其中之演算法與理論基礎不但是瞭解和使用線性規劃方法之不二法門，也是瞭解其他數學規劃方法之重要基礎，不可以予以藐視。

求解線性規劃問題之演算法是以單體法為最優先考慮對象，假如問題不是很複雜，或是所建立之模式不是非常龐大，都可利用單體法在可接受的時間內得到最佳解。通常一種演算法的好壞是可以利用其計算複雜度來衡量，單體法的平均計算複雜度可用下面公式表示：

$$\text{平均複雜度} = m^{2.5} \cdot n \cdot \Phi^{1.5}$$

其中 m 表示限制式數目， n 表示變數數目， Φ 表示限制係數矩陣之密度。而其平均重複次數大約是限制式數目的三倍到六倍之間。

除了單體法之外，在本章中上提到修正單體法及對偶單體法，由於修正單體法可以省略相當可觀之計算次數，因此一般之商業軟體都採用修正單體法來設計程式；至於對偶單體法的功用，除了在本章中所介紹的敏感度分析與參數分析之外，尚有許多的作用，因此有關其對偶性與演算法之特殊之處，不可加以忽視。

習題

1. 億昌電子工廠的生產線有兩組檢驗人員負責品質工作。該工廠每天工作 8 小時，每天至少須檢驗 1800 件組件。第一組檢驗人員每小時可以檢驗 25 件，其精確度為 98%；第二組檢驗人員每小時可以檢驗 15 件，其精確度為 95%。又第一組檢驗人員的工資每小時 40 元，第二組檢驗人員的工資每小時 30 元。在進行檢驗時，如果產生失誤，則每次檢驗失誤所引起的成本是每個組件 20 元之損失。目前該工廠的編制中，預留有 8 個第一組檢驗人員的職位，和 10 個第二組檢驗人員的職位。請問在最小總成本之目標下，如何規劃雇用第一組檢驗人員和第二組檢驗人員的數目？

- (1) 建立該問題之線性規劃模式。
- (2) 利用幾何圖解法求出最佳解。
- (3) 解釋最佳解之實際意義。

2. 茲有一標準形式之線性規劃問題：

$$\begin{aligned} &\text{minimize } z = 2x_1 + x_2 \\ &\text{subject to } \begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 6 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

(1) 已知有一個解，其基本變數為 (x_1, x_2, x_3) ，其基底逆矩陣為

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 & 0 \\ 0.8 & 0.6 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

請將其所對應之單體表全部列出。

(2) 請研判該解是否為一最佳解？何故？

3. 台光銀行目前欲規劃一筆總額有 12,000,000 元之貸款案件。其貸款