Ch 8 Random-Variate Generation

產生隨机變數

本章銜接前一章，假設某一特定分配已經被檢定通過，接下來便是產生這個分配的樣本做為模擬模式的投入。本章主要目的為介紹一些廣泛使用的技巧(用以產生隨机變數)而不是做目前最新發展技巧的評論與介紹。實務上，大部份模擬模式的建構者會使用現有語言中的副程式，或模擬語言的內建副程式，可是有些程式語言並沒有副程式可供使用，雖然這种情形發生的机率不大，但是值得去瞭解隨机變數是如何產生的。本章介紹三種產生隨机變數的方法：逆轉換(inverse transformation)，分配合(Convolution)與接受拒絕(Acceptance-rejection)。

在本章所介紹的方法,均假設由一致性分配得來之隨机乱数 $R_1, R_2, \ldots$ 已經可供使用,其中 R_i 的机率密度函数 p.d.f 與累積机率密度函数 c.d.f 如下.

$$f_R(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

8.1 Inverse Transformation Technique 逆轉換

逆轉換可用於指数,一致,韋布,三角形與實証分配。

8.1.1 Exponential Distribution 指数分配

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

λ 可詮釋為每單位時間平均發生次数

例如 到達間隔時間 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 有指数

分配參數 λ，λ 可詮釋為每單位時間平均到達次數。

$E(X_i)=\frac{1}{\lambda}$，$\frac{1}{\lambda}$ 是平均間隔時間。

本例之目標是發展一程序產生 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ 有指數分配。其程序如下：

step 1. 計算想要的隨机變數 X 的 c.d.f。在本例中指數分配 c.d.f $F(x)=1-e^{-\lambda x}$，$x \geq 0$

step 2. 令 $F(x)=R$，i.e. $1-e^{-\lambda x}=R$，$x \geq 0$

step 3. 解 x（以 R 表示）

$$1-e^{-\lambda x}=R$$

$$e^{-\lambda x}=1-R$$

$$-\lambda x=\ln(1-R)$$

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$$

R 是 $(0,1)$ 間的一致分配

step 4. 產生隨机亂數 $R_1, R_2, R_3, \ldots$ 並且計算想要的隨机變數 $X_i=F^{-1}(R_i)$

$$F^{-1}(R)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R)$$

$$X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-R_i)$$

一種簡化型經常以 R_i 取代 $1-R_i$

$$X_i=-\frac{1}{\lambda}\ln R_i$$

Table 8.1 Generation of Exponential Variables X_i with Mean 1, Given Random Numbers R_i

i	1	2	3	4	5
R_i	0.1306	0.0422	0.6597	0.7965	0.7696
X_i	0.14	0.0431	1.078	1.592	1.468

8.1.2 Uniform Distribution - 一致性分配

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

step 1. c.d.f

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

step 2. 令 $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}=R$

step 3. 解 x (以 R 表示)

$$\frac{x-a}{b-a}=R \qquad x-a=R(b-a)$$

$$\underline{x=a+(b-a)R}$$

8.1.3 Weibull Distribution

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} & x \ge 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\alpha, \beta > 0$

step 1. c.d.f $F(X) = 1 - e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}}$, $x \geq 0$

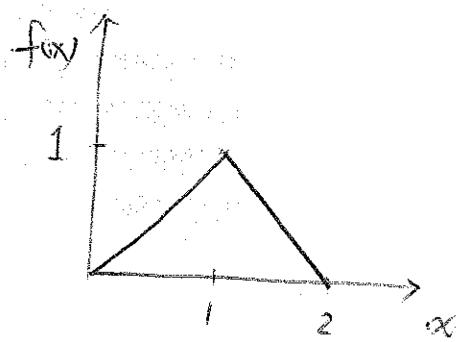
step 2 令 $F(x) = 1 - e^{-(\frac{x}{\alpha})^{\beta}} = R$

step 3 解 X (以 R 表示)

$$X = \alpha[-\ln(1-R)]^{\frac{1}{\beta}}$$ ✓

8.1.4 Triangular Distribution 三角形分配

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ ✓



step1, c.d.f

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 < x \leq 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & 1 < x \leq 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$ ✓

step 2 $0 \leq x \leq 1$ $1 < x \leq 2$

step 3 $R = \frac{x^2}{2}$ $R = 1 - \frac{(2-x)^2}{2}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$x = \sqrt{2R}$ $0 \leq R \leq \frac{1}{2}$ $x = 2 - \sqrt{2(1-R)}$ ✓ $\frac{1}{2} < R \leq 1$

8.1.5 Empirical Continuous Distributions

如果模式建構者無法找到一理論分配當成模式的投入資料，則實証分配必需採用。

Example 8.2

2.76 1.83 0.80 1.45 1.24 五筆資料被蒐集

將資料由小排到大 $x_{(1)} \le x_{(2)} \le x_{(3)} \le x_{(4)} \le x_{(5)}$

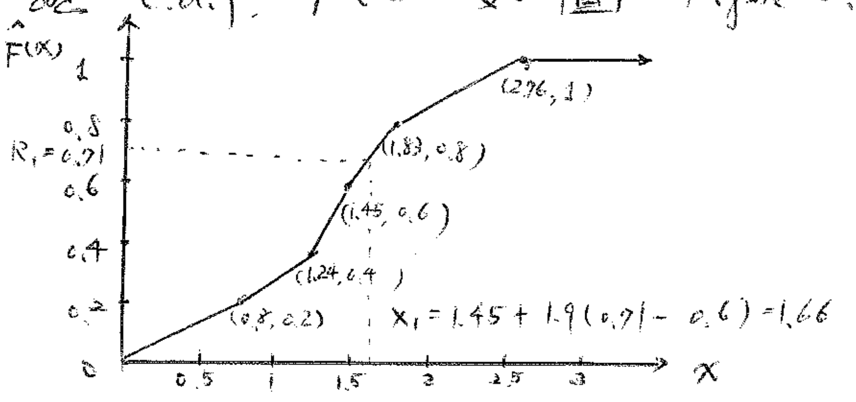
並定義最小值 $x_{(0)}=0$，基於這5筆資料

令 $\frac{1}{n}=\frac{1}{5}$ 為一區間發生的機率，其計算如表8.2

Table 8.2 Summary of Five Crew Response-Time Data

i	Interval $x_{(i-1)} < x \le x_{(i)}$	Probability $\frac{1}{n}$	Cumulative Probability $\frac{i}{n}$	Slope a_i
1	$0 < x \le 0.8$	0.2	0.2	4
2	$0.8 < x \le 1.24$	0.2	0.4	2.2
3	$1.24 < x \le 1.45$	0.2	0.6	1.05
4	$1.45 < x \le 1.83$	0.2	0.8	1.9
5	$1.83 < x \le 2.76$	0.2	1	4.65

結果的實証 c.d.f. $\hat{F}(x)$ 如圖 Figure 8.4 所示，



第 i 線段之斜率可由下列決定

$$a_i = \frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}} = \frac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{\frac{1}{n}}$$

The inverse cdf 可由下列計算

$$X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i\left(R - \frac{(i-1)}{n}\right),$$

其中 $\frac{i-1}{n} < R \le \frac{i}{n}$

列如隨机乱数 $R_1 = 0.71$ 被產生

R_1 落在第 4 區間 ($\frac{3}{5} = 0.6$ 和 $\frac{4}{5} = 0.8$)

$$X_1 = x_{(4-1)} + a_4\left(R_1 - \frac{(4-1)}{n}\right)$$

$$= 1.45 + 1.90(0.71 - 0.6)$$

$$= 1.66$$

如果資料非常多，上百或上千，將資料分組可將連續實証分配的累積机率密度函数去配合次数分配。

僅需將 $X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i\left(R - \frac{(i-1)}{n}\right)$

稍加修改成 $X = \hat{F}^{-1}(R) = x_{(i-1)} + a_i(R - c_{i-1})$

即可，其中 $a_i = \dfrac{x_{(i)} - x_{(i-1)}}{c_i - c_{i-1}}$ ⇐ interval relative frequency

C_i 為第 i 區間的累積机率，且 $C_{i-1} < R \le C_i$，

Example 8.3 100 筆修理時間的資料被收集且彙整如表 8.3.

Tabl 8.3 Summary of Repair-Time Data

i	Interval (Hours)	Frequency	Relative Frequency	Cumulative Frequency C_i	Slope a_i
1	$0.25 \le x \le 0.5$	31	0.31	0.31	0.81 $= \frac{0.5-0.25}{0.31-0}$
2	$0.5 < x \le 1$	10	0.1	0.41	5 $= \frac{1-0.5}{0.41-0.31}$
3	$1 < x \le 1.5$	25	0.25	0.66	2.0
4	$1.5 < x \le 2$	34	0.34	1.0	1.47

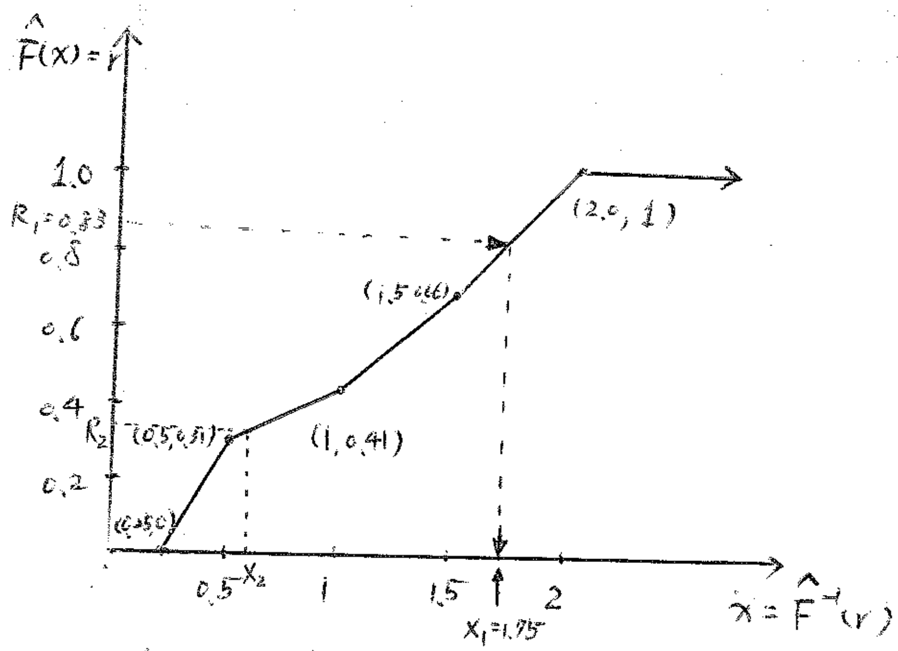


Figure 8.5 Generating variates from the empirical distribution for repair-time data ($X \ge 0.25$)

例如第一個隨机亂數 $R_1 = 0.83$ 則 $\overset{C_3}{.66} \le R_1 \le \overset{C_4}{1}$

$$X_1 = x_{(4-1)} + a_4(R_1 - C_{4-1}) = 1.5 + 1.47(0.83 - 0.66)$$

$$= 1.75$$

另一例子，$R_1 = 0.33$ $\quad C_1 = 0.31 < R_2 \le 0.41 = C_2$

$$X_2 = X_{(1)} + a_2(R_2 - C_1) = 0.5 + 5(0.33 - 0.31) = 0.6$$

當資料分組時，建議使用較小的相对區間，可導致更準確的 c.d.f。

幾項建議如下

1. 觀察數目眾多時，分成 20 ~ 50 組亦可，此時編寫一程式處理將更增加效率。

2. 在 example 8.2 中假設 $0 \le X \le 2.76$，所以 $X_{(0)} = 0$，$X_{(5)} = 2.76$ 而分成 5 個區間，如果依據事先所知識或經驗，資料會落在其他範圍，例如修理時間會在 3 分鐘之間，則應修正 $X_{(6)} = 3$，並將 $\frac{1}{n}$ 改成 $\frac{1}{6}$，改成 6 個區間。

8.1.7 Discrete Distributions

所有離散分配可使用逆轉換的技術求取。

example 8.4 (An Empirical Discrete Distribution)

每日結束時，IHW 公司在裝貨區裝載的貨物數目分別是 0、1、2，其相对次數為 0.5、0.3、0.2。公司內部的顧問被要求建立模式改善裝貨與搬運作業之效率。

這項作業需產生隨機變數 X，代表裝載貨物的數目。顧問決定使用 Table 8.5

Table 8.5 Distribution of Number of Shipments, X

x	$p(x)$	$F(x)$
0	0.5	0.5
1	0.3	0.8
2	0.2	1

產生 X，產生的結果在 Table 8.6

Table 8.6 Table for Generating the Discrete Variate X

i	Input r_i	Output x_i
1	0.5	0
2	0.8	1
3	1	2

機率質量函數 pmf 如下

$$p(0) = p(X=0) = 0.5$$
$$p(1) = p(X=1) = 0.3$$
$$p(2) = p(X=2) = 0.2$$

c.d.f $F(x) = p(X \le x)$ 如下

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 0.5 & 0 \le x < 1 \\ 0.8 & 1 \le x < 2 \\ 1 & 2 \le x \end{cases}$$

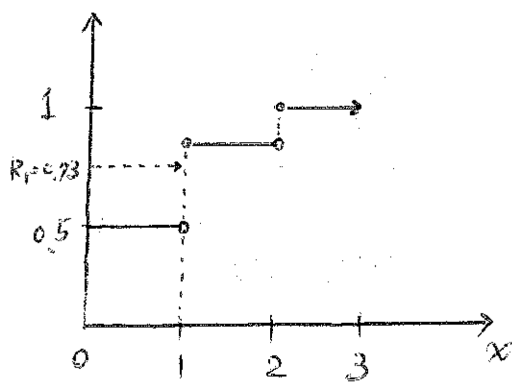


Figure 8.6 The cdf of number of shipments, X.

產生隨机变數，逆轉換技術變成一種

(table-lookup procedure) 表格尋找程序。例如產生

隨机亂數 $R_1 = 0.73$，首先在 Y 軸上畫一水平

線，往上跳遇到 c.d.f 後needed畫一垂直線

產生 $X_1 = 1$。

表格尋找程序可以下列方式產生

$$X = \begin{cases} 0 & R \le 0.5 \\ 1 & 0.5 < R \le 0.8 \\ 2 & 0.8 < R \le 1.0 \end{cases}$$

example 8.5 (A Discrete Uniform Distribution)

上例示範表格尋找程序，本例示範使用代數方式產生分配。考慮一離散一致分配

$$p(x) = \frac{1}{k}, \quad x = 1, 2, \ldots, k \qquad \text{p.d.f}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{k} & 1 \le x < 2 \\ \frac{2}{k} & 2 \le x < 3 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{k-1}{k} & k-1 \le x < k \\ 1 & k \le x \end{cases}$$

令 $x_i = i$ 而 $r_i = p(1) + \cdots + p(x_i) = F(x_i) = \frac{i}{k}$, $i = 1, 2, \ldots, k$

使用 $F(x_{i-1}) = r_{i-1} \le R \le r_i = F(x_i)$

則 $r_{i-1} = \frac{i-1}{k} < R \le r_i = \frac{i}{k}$

解上述不等式 $i-1 < Rk \le i$

$$Rk \le i < Rk+1$$

令 $\lceil y \rceil$ 代表 $\ge y$ 之最小整數，例如

$\lceil 7.82 \rceil = 8$，$\lceil 5.34 \rceil = 6$，$\lceil -1.45 \rceil = -1$。

$Rk \le i < Rk+1$ 產生一公式產生 X

$$X = \lceil Rk \rceil$$

例如 $k=10$ $R_1=0.78$ $X_1=\lceil 7.8 \rceil = 8$

$R_2 = 0.03$ $X_2 = \lceil 0.3 \rceil = 1$

$R_3 = 0.23$ $X_3 = \lceil 2.3 \rceil = 3$

$R_4 = 0.97$ $X_4 = \lceil 9.7 \rceil = 10$

$\vdots$

依此類推

Example 8.6

一離散分配 p.m.f

$$p(x) = \frac{2x}{k(k+1)},\quad x = 1, 2, \ldots, k$$

其 c.d.f $F(x) = \sum_{i=1}^{x} \frac{2i}{k(k+1)}$

$$= \frac{2}{k(k+1)} \sum_{i=1}^{x} i = \frac{2}{k(k+1)} \frac{x(x+1)}{2}$$

$$= \frac{x(x+1)}{k(k+1)}$$

使用 $F(X_{i-1}) = r_{i-1} < R \le r_i = F(X_i)$

$$F(x-1) = \frac{(x-1)x}{k(k+1)} < R \le \frac{x(x+1)}{k(k+1)} = F(x)$$

兩邊同乘 $k(k+1)$

解上式 $(x-1)x < k(k+1)R \le x(x+1)$

先解 $(x-1)x = k(k+1)R$，再令 $X = \lceil x-1 \rceil$

整理後 $x^2 - x - k(k+1)R = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k(k+1)R}}{2}$$

$$X = \left\lceil \frac{1+\sqrt{1+4k(k+1)R}}{2} - 1 \right\rceil$$

Example 8.7 (The Geometric Distribution)

the geometric distribution with p.m.f

$$p(x) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

$0 < p < 1$

$$F(x) = \sum_{j=0}^{x} p(1-p)^{j}$$

$$= \frac{p\{1-(1-p)^{x+1}\}}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^{x+1}$$

$$F(x-1) = 1-(1-p)^{x} < R < 1-(1-p)^{x+1} = F(x)$$

$$(1-p)^{x+1} \le 1-R < (1-p)^{x}$$

$$(x+1)\ln(1-p) \le \ln(1-R) < x\ln(1-p)$$

$1-p<1$ imply $\ln(1-p)<0$.

$$\frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \le x < \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)}$$

$$X = \left\lceil \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \right\rceil$$

令 $\beta = \dfrac{-1}{\ln(1-p)}$ 則 $\beta > 0$

$$X = \lceil -\beta \ln(1-R) - 1 \rceil$$

另一常用 $q=1$

$p(x) = p(1-p)^{x-q} \quad (x = q, q+1, \ldots)$

$$X = q + \left\lceil \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \right\rceil$$

example 8.8

產生三個數值由幾何分配 $\{X \ge 1\}$，平均數2.

$$p(x) = p(1-p)^{x-1} \quad (x = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{1}{p} = 2 \quad \therefore p = \frac{1}{2} \qquad p = \frac{1}{2} \quad (1-p) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{\ln(1-p)} = -1.443$$

以常用公式 $a + \left\lceil \frac{\ln(1-R)}{\ln(1-p)} - 1 \right\rceil$

$R_1 = 0.932 \quad X_1 = 1 + \lceil -1.443 \ln(1-0.932) - 1 \rceil = 4$

$R_2 = 0.105 \quad X_2 = 1 + \lceil -1.443 \ln(1-0.105) - 1 \rceil = 1$

$R_3 = 0.687 \quad X_3 = 1 + \lceil -1.443 \ln(1-0.687) - 1 \rceil = 2$

8.2 Direct Transformation for the Normal and Lognormal Distributions

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < x < \infty$$

標準常態 c.d.f.

這種方式在程式語言 FORTRAN, C 或 PASCAL 容易編寫

當有了 $N(0,1)$ 就很容易產生 $N(\mu, \sigma^2)$.

而有了方法產生 $N(\mu, \sigma^2)$ 即可透過轉換

$Y = e^{x}$ 產生 LOGNORMAL RANDOM VARIATE.

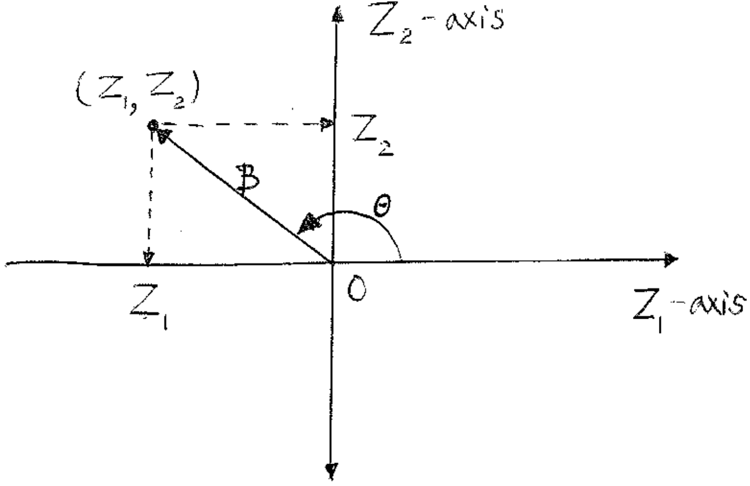


Figure 8.7 Polar representation of a pair of standard normal variables

考慮兩標準常態隨机變數 Z_1 和 Z_2 如圖 8.7 畫在平面上以一点表示。以極座標方式表示,

$$Z_1 = B\cos\theta \qquad\qquad (8.23)$$
$$Z_2 = B\sin\theta$$

已知 $B^2 = Z_1^2 + Z_2^2$ 有 (χ^2 分配,自由度 2 (與指數分配有平均數 2 相等) 於是半徑 B 可用 $B = (-2\ln R)^{\frac{1}{2}}$ 產生。 (8.24)

一般而言 角度 θ 是於 $0 \sim 2\pi$ 間一致分配,且半徑 B 與 θ 是相互獨立的。綜合(8.23)與(8.24)可由兩隨机亂數 R_1 和 R_2 產生兩獨立隨机標準常態變數

$$Z_1 = (-2\ln R_1)^{\frac{1}{2}}\cos(2\pi R_2) \qquad\qquad (8.25)$$
$$Z_2 = (-2\ln R_1)^{\frac{1}{2}}\sin(2\pi R_2)$$

例如 $R_1 = 0.1758 \quad R_2 = 0.1489$

pair 又要用一起，只 return 一个

$$\begin{cases} Z_1 = [-2\ln(0.1758)]^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi\, 0.1489) = 1.11 \\ Z_2 = [-2\ln(0.1758)]^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi\, 0.1489) = 1.5 \end{cases}$$

Box

如果要獲得常態變數 X_i 有平均數 u 和變異數 σ^2 則使用 (u, σ^2)

$$X_i = u + \sigma Z_i \text{ 轉換}$$

例如將兩標準常態變數轉換成常態變數有平均數 $u=10$ 與變異數 $\sigma^2=4$.

$$X_1 = 10 + 2(1.11) = 12.22$$

$$X_2 = 10 + 2(1.5) = 13.00$$

8.3 Convolution Method 分配合方法

加總獨立變數稱為原來變數之分配合 (convolution)。在這裡分配合指的是加總兩个或兩个以上隨机變數去得到一新的隨机變數。這項技術可用以得到 Erlang variate 和 Binomial variate。在此的重点不是想獲得的變數的 c.d.f，而是想獲得的變數與其他變數間之関係。

與較容易產生變數。

8.3.1 Erlang Distribution

Erlang 隨机變數 X 有參數 (K, θ) 是 K 個獨立隨机變數 X_i $(i=1,\dots,K)$ 之總和，每一變數有平均數 $\frac{1}{K\theta}$。亦即 $X = \sum_{i=1}^{K} X_i$

既然 X_i 可以 equation (8.3) 產生 $X_i = -\frac{1}{\lambda} \ln R_i$

將 $\frac{1}{\lambda}$ 換成 $\frac{1}{K\theta}$

$$X = \sum_{i=1}^{K} -\frac{1}{K\theta} \ln R_i$$

$$= -\frac{1}{K\theta} \ln \prod_{i=1}^{K} R_i \qquad (8.27)$$

example 8.9 卡車到達一大型倉庫呈現隨机狀態，以 Poisson process 表示，到達率 $\lambda=10$ 卡車/每小時。入口守衛將卡車分別指派至南與北的裝貨中心，分析者發展一模式研究南裝貨中心的裝卸貨過程，需要南裝貨中心的到達過程。令 X 代表連續到達南裝貨

中15的卡車的間隔時間(interarrival time)。

X等於加總到達入口兩間隔時間，~~每~~一有平均數0.1小時或6分鐘。於是X是Erlang分配，$K=2$，平均數 $\frac{1}{\theta}=\frac{2}{\lambda}=0.2$ 小時。欲產生X，先產生 R_1 R_2

以 equation (8.27)

$$X=-\frac{1}{K\theta}\ln\left(\prod_{i=1}^{K}R_i\right)$$

例如 $R_1=0.937$
$R_2=0.217$

$$=-0.1\ln[0.937\cdot 0.217]=0.159 \text{ hours}$$

or 9.56 minutes.

8.4 Acceptance-Rejection Technique

接受拒絕技術

假設分析者需要設計一方法產生隨机變數X，在 $\frac{1}{4}$ 與 1 間一致分佈，可依據下列步驟。

step 1. 產生一隨机亂數 R

step 2a. 如果 $R\geq\frac{1}{4}$，令 $X=R$，進行 step3.

step 2b. 如果 $R<\frac{1}{4}$，回到 step 1.

step 3. 如果需要再產 $[\frac{1}{4},1]$ 的數目，重覆由 step 1 開始的步驟，如果沒有需要，則停止。

每次執行 step 1，便產生一個亂數 R，step 2a 是"接受"，step 2b 是"拒絕"，這就是本節要介紹的接受-拒絕方法中的"接受"與"拒絕"。綜合歸納本技術：隨機變數是某種分配（在上例是一致分配）被產生在某種條件成立下（$R > \frac{1}{4}$）。可以統計之條件機率計算出上例之正確機率。

令 $\frac{1}{4} \le a < b \le 1$

$$P\left(a < R \le b \,\middle|\, \frac{1}{4} \le R \le 1\right) = \frac{P(a < R \le b)}{P(\frac{1}{4} \le R \le 1)} = \frac{b-a}{\frac{3}{4}}.$$

為使接受-拒絕方法有效率，最主要是將拒絕次數儘量減少。另一種方式處理為

$$X = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}R.$$

接著繼續介紹以接受-拒絕方法產生隨機變數 Poisson 分配與 Gamma 分配。

8.4.1 Poisson Distribution

A Poisson random variate, N, with mean $\alpha > 0$.

p.m.f.

$$p(n) = P(N = n) = \frac{e^{-\alpha}\alpha^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

N可詮釋為一單位時間從 Poisson process 中的到達次數。$A_1, A_2, \ldots$ 為連續到達顧客之間隔時間，A_1, A_2 為指數分配，有參數 α，（α 是單位時間內平均到達數目）

Poisson distribution 和 exponential distribution 有某種關係

$$N = n$$

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \le 1 < A_1 + \cdots + A_n + A_{n+1} \quad (8.30)$$

$N = n$，代表在單位時間內，正好 n 次到達。第 n 個到達發生在時間 1 之前，第 $n+1$ 個到達發生在時間 1 之後。很清楚地上述兩敘述是相等的，產生指數到達間隔時間直到 $n+1$ 次到達發生在時間 1 之後，則令 $N = n$，為有效產生 (8.30)，通常使用 (8.3) $A_i = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \ln R_i$ 簡化問題

$$\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\alpha} \ln R_i \le 1 < \sum_{i=1}^{n+1} -\frac{1}{\alpha} \ln R_i$$

兩邊同乘以 $-\alpha$.

$$\ln\prod_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \ln R_i \geq -\alpha > \sum_{i=1}^{n+1} \ln R_i = \ln\prod_{i=1}^{n+1} R_i$$

使用 $e^{\ln x} = x$

$$\prod_{i=1}^{n} R_i \geq e^{-\alpha} > \prod_{i=1}^{n+1} R_i \qquad (8.31)$$

(8.31) 如同 (8.30). 產生 Poisson 隨机变数 N, 之程序如下。

step 1 令 $n=0$, $P=1$

step 2 產生隨机亂数 R_{n+1} 以 $P \cdot R_{n+1}$ 取代 P

step 3. 如果 $P < e^{-\alpha}$, 則接受 $N=n$, 否則拒絕目前的 n, 將 n 增加 1, 回到 step 2.

e.g 8.10 產生三個 Poisson 变数. mean $\alpha = 0.2$ 首先計算 $e^{-\alpha} = e^{-0.2} = 0.8187$

step 1 令 $n=0$, $P=1$

step 2 $R_1 = 0.4357$, $P = 1 \cdot R_1 = 0.4357$

step 3 既然 $P < e^{-\alpha} = 0.8187$, 接受 $N=0$.

step 1-3. ($R_1 = 0.4146$ 導致 $N=0$).

step 1 令 $n=0$, $P=1$.

step 2. $R_1 = 0.8353$ $P = 1 \cdot R_1 = 0.8353$

step3 既然, $P \geq e^{-\alpha}$ 拒絕 $n=0$ 令 $n=0+1=1$. 回到 step 2

step 2. $R_2=0.9952$, $P = P \cdot R_2 = 0.8535 \cdot 0.9952 = 0.8313$

step 3. 既然 $P \geq e^{-\alpha}$ 拒絕 $n=1$. 令 $n=1+1=2$. 回到 step 2.

step 2. $R_3=0.8004$ $P = P \cdot R_3 = 0.8313 \cdot 0.8004 = 0.6654$

step3 既然, $P < e^{-\alpha}$, 接受 $N=2$.

n	R_{n+1}	P	Accept/Reject	Result
0	0.4357	0.4357	$p < e^{-\alpha}$ (接受)	$N=0$
0	0.4146	0.4146	$p < e^{-\alpha}$ (接受)	$N=0$
0	0.8353	0.8353	$p \geq e^{-\alpha}$ (拒絕)	
1	0.9952	0.8313	$p \geq e^{-\alpha}$ (拒絕)	
2	0.8004	0.6654	$p < e^{-\alpha}$ (接受)	$N=2$

上表需要產生產生三個 Poisson 变数. 長期而言,

產生 1000 個 Poison Variates 需要 1200 个隨机乱数.

$$E(N+1) = \alpha+1 \quad \text{在本例} \quad \alpha=0.2$$

$$E(N+1) = 1.2 \quad \text{期望次数是 } 1.2 \text{ 次}$$

Example 8.11 巴士到達桃樹街与北街的巴士站依據 Poisson 过程平均每15分鐘一班. 產生一隨机变数 N, 代表巴士的到達数目在一小時內. $\alpha=4$. 首先計算 $e^{-\alpha} = e^{-4} = 0.0183$

n	R_{n+1}	P	Accept/Reject	Result
0	0.4357	0.4357	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
1	0.4146	0.1806	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
2	0.8353	0.1508	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
3	0.9952	0.1502	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
4	0.8004	0.1202	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
5	0.7945	0.0955	$P \geq e^{-\alpha}$ (reject)	
6	0.1530	0.0146	$P < e^{-\alpha}$ (Accept)	$N=6$

上表可看出 $\alpha=4$ 較大，通常需要較多的隨机亂数。例如需要 1000 Poisson variates，大約需要 $1000(\alpha+1)=5000$ 隨机亂数需要產生。当 $\alpha \geq 15$ 時，本節介紹的拒絶技術將十分昂貴耗時。幸好一種基於常態分配的近似技術運作十分理想。當 α 很大時，

$$Z=\frac{N-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \sim N(0,1).$$

首先產生 Z 以 (8.25)。再產生 Poisson variate N

$$N=\lceil \alpha+\sqrt{\alpha}\,Z-0.5 \rceil \qquad (8.32)$$

if $\alpha+\sqrt{\alpha}Z-0.5<0$ 令 $N=0$.

8.42 Gamma Distribution

許多產生 Gamma 隨机變數的接受拒絕技術已被發展。其中最有效的是 Cheng [1977] 就任何 $\beta \geq 1$ 的參數其平均試誤次數為在 1.13 與 1.47 之間。如果 β 是整數，則使用前面介紹過分配合之方法。因為 Erlang 分配是 Gamma 分配的 special case. Gamma 分配的 scale parameter Θ 和 shape parameter β 亦即平均為 $\frac{1}{\Theta}$ 和變異數 $\frac{1}{\beta\theta^2}$.

Step 1. Compute $a = (2\beta - 1)^{1/2}$, $b = 2\beta - \ell n4 + 1/a$.
Step 2. Generate R_1 and R_2.
Step 3. Compute $X = \beta[R_1/(1 - R_1)]^a$.
Step 4a. If $X > b - \ell n(R_1^2 R_2)$, reject X and return to step 2.
Step 4b. If $X \leq b - \ell n(R_1^2 R_2)$, use X as the desired variate. The generated variates from step 4b will have mean and variance both equal to β. If it is desired to have mean $1/\theta$ and variance $1/\beta\theta^2$ as in Section 5.4, then include
Step 5. Replace X by $X/\beta\theta$.

The basic idea of all acceptance-rejection methods is again illustrated here, but the proof of this example is beyond the scope of this book. In step 3, $X = \beta[R_1/(1 - R_1)]^a$ is not gamma distributed, but rejection of certain values of X in step 4a guarantees that the accepted values in step 4b do have the gamma distribution.

EXAMPLE 8.12

Downtimes for a high-production candy-making machine have been found to be gamma distributed with mean 2.2 minutes and variance 2.10 minutes². Thus, $1/\theta = 2.2$ and $1/\beta\theta^2 = 2.10$, which implies that $\beta = 2.30$ and $\theta = 0.4545$.

Step 1. $a = 1.90$, $b = 3.74$.
Step 2. Generate $R_1 = 0.832$, $R_2 = 0.021$.
Step 3. Compute $X = 2.3(0.832/0.168)^{1.9} = 48.1$.
Step 4. $X = 48.1 > 3.74 - \ell n[(0.832)^2 0.021] = 7.97$, so reject X and return to step 2.
Step 2. Generate $R_1 = 0.434$, $R_2 = 0.716$.
Step 3. Compute $X = 2.3(0.434/0.566)^{1.9} = 1.389$.
Step 4. Since $X = 1.389 \leq 3.74 - \ell n[(0.434)^2 0.716] = 5.74$, accept X.
Step 5. Divide X by $\beta\theta = 1.045$ to get $X = 1.329$.

This example took two trials (i.e., one rejection) to generate an acceptable gamma-distributed random variate, but on the average to generate, say, 1000 gamma variates, the method will require between 1130 and 1470 trials, or equivalently, between 2260 and 2940 random numbers. The method is somewhat cumbersome for hand calculations, but is easy to program on the computer and is one of the most efficient gamma generators known. ◄