應在 ±0.2%之內，B類則應在 ±1%之內，C類之誤差則在 ±5%以內。

# 13-5 存貨管制決策模式

存貨理論之模式
當位時間

一般持含含一成本函數，總成本可能包含

前已提及，存貨管理另一重要的課題即是決定一次訂購多少數量及何時訂購以使總成本最小的問題，由於各種環境及影響因素的差異，使得存貨決策之模式非常多，分別適用於不同的情況，本節將按表13-1的分類方式，逐一介紹各種模式的假設條件與應用情形。

訂貨成本，持有成本，購貨成本，等

## 13-5-1 確定性情況之模式

隨著函數本身的複雜性，應用不同的數學技巧，求出其最適解

### 13-5-1-1 模式 1：經濟訂購量模式 (EOQ)

方式亦均可證明該解是最佳

① 經濟訂購量(Economic Order Quantity，或EOQ)模式的假設條件是：(1)對未來的情況預測是確定的，(2)需求是均勻（固定）的，(3)物料一次送達，前置時間不變，(4)物料價格固定沒有數量折扣。圖13-12指出存貨水準與時間的關係，而圖13-13則顯示總成本與數量$(Q)$之間的關係；這裏的總成本包括了訂購成本、存貨持有成本、與存貨貨品本身的成本。由於未來的情況（專指供需情形）是確定的，故不會有缺貨的情形發生，因此不會有缺貨成本。

② 在導出EOQ的公式之前，我們先定義下列符號的意義：

$D$ = 年度（或某一段期間）的需求量

$P$ = 採購項目的單價

$S$ = 固定訂購成本（每次訂購之成本）

$H$ = 持有成本（每一單位儲存一年或一段期間之成本）

$L$ = 前置期間（訂貨至收貨的時間）



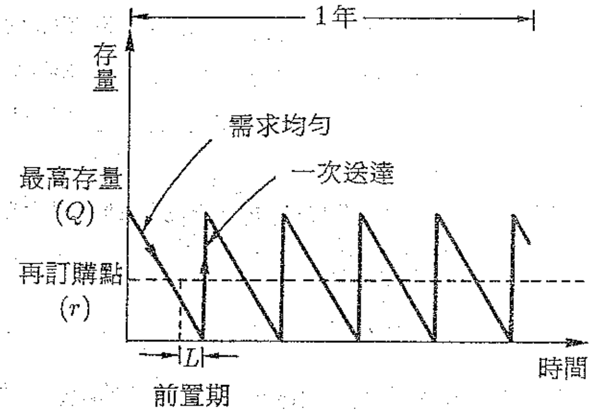



圖 13-12 經濟訂購量的存量與時間關係圖

① cycle time

② 平均存貨水準
期初+期末 / 2

③ 以週期時間內平均存貨表全年

週期時間 除以

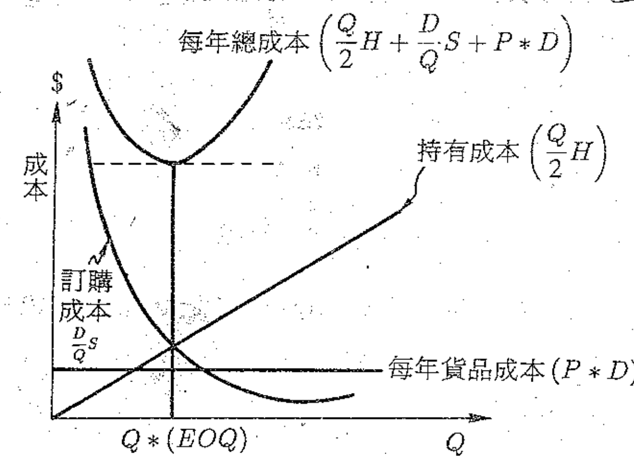



圖 13-13 每年存貨成本

如圖13-12所示，當存量的水準為$Q$時，由於需求是均勻的假設，因此存量會呈直斜線的型式下降；當存量降至再訂購點$(r)$時，則發出訂單，而由於未來情況是確定的假設下，因此貨品必於前置期$(L)$送達，且一次送達數量$Q$，而在送達前，其存量水準剛好等於零。如

此週而復始，會形成圖 13-12 的鋸齒狀。圖 13-13 則說明每次訂購數量愈多則可降低每一單位的訂購成本，但持有成本會呈直線增加，而貨品本身的成本則因單價是固定的（沒有折扣），且每年需求也固定，故為一平行的直線 ($= PD$)。現在面對的問題是，若使總成本最低，則每次應訂購多少。

3 由上之說明可知，總成本 ($TC$) 等於持有成本加上訂購成本再加上單價乘購買量，如下之 13-1 式：

假需平衡的情況下

$$TC = \frac{Q}{2}H + \frac{D}{Q}S + PD \qquad (13\text{-}1)$$

持有成本 訂購成本 購貨成本

欲求最小總成本的訂購量可利用微分對 $TC$ 求其極值，如下之 13-2 式：

$1 \times Q \div 2 = \frac{Q}{2}$

$$\frac{d(TC)}{dQ} = \frac{1}{2}H - \frac{DS}{Q^2} \cong 0 \qquad (13\text{-}2)$$

或是 存貨週期時間 cycle time

求解得

$T \times Q \div 2 = \frac{TQ}{2}$

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \qquad (13\text{-}3)$$

全年平均存貨 $\frac{TQ}{2} \times \frac{1}{T} = \frac{Q}{2}$

並且，

$$TC^* = \frac{Q^*}{2}H + \frac{D}{Q^*}S + P \cdot D \qquad (13\text{-}4)$$

$\frac{1}{6}$年 $Q \div 2 = \frac{Q}{12}$

$Q^*$ 即為經濟訂購量 ($EOQ$)，$TC^*$ 為最低之總成本。

**例 13-1**

已知某電子工廠每月需用電阻器 6250 個，每個單價為 0.5 元，每訂購一次之成本為 80 元，持有成本每單位每年為 0.077 元，前置期間為 0.5 個月，試求在 $EOQ$ 的假設條件下之最小成本的訂購量？

需求單位

**解**：由題目可知

$D = 6250$ 個／月 $= 6,250 \times 12 = 75,000$ 個／年

$P = 0.5$ 元／個



$S = 80$ 元／次

$H = 0.077$ 元／個 × 年

$L = 0.5$ 月

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 75000 \times 80}{0.077}} = 12484 \text{（個）}$$

$$TC^* = \frac{12484}{2}(0.077) + \frac{75000}{12484}(80) + 0.5(75000)$$

$$= 961.25 + 37500 = 38461.25 \text{（元）}$$

已知每月需求 6250

$r$（再訂購點）$= 0.5 \times 6250 = 3125$（個）前置時間 0.5 個

以上的計算都假設模式內所有的參數（亦即每次訂購成本、持有成本、每年需求量等）能正確的予以估計。但是，實務上這些估計值也許會有些誤差，而這些誤差對於 $EOQ$ 或總成本的影響為何，常為經理人員所關心。就理論的觀點而言，研究模式內的參數產生改變時，對產出變數（或應變數）的影響，即為**敏感性分析**(sensitivity analysis)。在 $EOQ$ 的模式中，主要的產出變數為經濟訂購量 $Q^*$（亦即 $EOQ$）與總成本 ($TC$)；而由於總成本項中包括了貨品成本（亦即 $PD$），即此項為固定的，故我們常用**總變動成本**(total variable cost，簡稱 TVC) 來進行敏感性分析，亦即 $TVC$ 為訂購成本加上存貨持有成本之總和。此成本不準確對總成本會有何影響？

上式公式是用實際所算值以 S.H 和 D 代入所得如果 Q

假設每次訂購成本 ($S$)、存貨持有成本 ($H$)、與每年需求量 ($D$) 的預估比值分別為 $X_S, X_H, X_D$，以此帶入 (13-3) 式，則可得新的 $EOQ$，若以 $Q$ 代替，則：

三種同時變動

$$Q = \sqrt{\frac{2(DX_D)(SX_S)}{HX_H}} = \sqrt{\frac{2DS}{H}}\sqrt{\frac{X_D X_S}{X_H}} = Q^*\sqrt{\frac{X_D X_S}{X_H}} \qquad (13\text{-}5a)$$

或者 $\frac{Q - Q^*}{Q^*} = \sqrt{\frac{X_D X_S}{X_H}} - 1 \qquad (13\text{-}5b)$

$X_D = \frac{預估需求}{實际需求} = \frac{110}{100} = 1.1$

分別代表預估值

其中，$X_D = \dfrac{\text{預估年需求量}}{\text{實際年需求量}}$

$X_S = \dfrac{\text{預估訂購成本}}{\text{實際訂購成本}}$

$X_H = \dfrac{\text{預估存貨持有成本}}{\text{實際存貨持有成本}}$

前面 13-5a 與 13-5b 式係指出三個參數同時變化的情形；如果一次只考慮一個參數的變化，則情形更為簡化，亦即：只变动一成本

假設 $X_D = 1$，$X_S = 1$，則 13-5b 式變成：

$$\frac{Q-Q^*}{Q^*} = \sqrt{\frac{X_D X_S}{X_H}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{X_H}} - 1 \qquad \text{(13-6a)}$$

假設 $X_D = 1$，$X_H = 1$，則 13-5b 式變成：

$$\frac{Q-Q^*}{Q^*} = \sqrt{X_S} - 1 \qquad \text{(13-6b)}$$

假設 $X_S = 1$，$X_H = 1$，則 13-5b 式變成：

$$\frac{Q-Q^*}{Q^*} = \sqrt{X_D} - 1 \qquad \text{(13-6c)}$$

表 13-3 指出不同的 $X_S$，$X_H$，$X_D$ 所產生對 $Q^*$ 的影響；顯然地，這些參數對模式而言非常不敏感，例如預估持有成本為實際持有成本的 2 倍時（亦即估計誤差 100%），其 $Q^*$ 的變化還小於 30%；而訂購成本或每年需求量預估值為實際值的 2 倍時，$Q^*$ 的變化也只不過達 41.4%。同樣我們可以观察不同成本变动和 EOQ 变动时總成本的影响

在總變動成本的敏感性分析方面，假設 $TVC^*$ 是訂購量為 $EOQ$ 時的總變動成本，而 $TVC$ 為有預估誤差時的總變動成本，則

$$TVC = \frac{DS}{Q} + \frac{QH}{2}$$

$Q$ 以 $\sqrt{\frac{2DS}{H}\frac{X_D X_S}{X_H}}$ 代入



$$= \frac{DS}{\sqrt{\frac{2DS}{H}\frac{X_D X_S}{X_H}}} + \frac{\sqrt{\frac{2DS}{H}\frac{X_D X_S}{X_H}}\,(H)}{2}$$

表 13-3　不同參數的預估誤差對 $EOQ$ 的影響

| 預估比值 $X_H$ | $\left(\frac{Q-Q^*}{Q^*}\right)^a$ | 預估比值 $X_S$ 或 $X_D$ | $\left(\frac{Q-Q^*}{Q^*}\right)^b$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | + 216.2 | 0.1 | − 68.4 |
| 0.2 | + 123.6 | 0.2 | − 55.3 |
| 0.3 | + 82.4 | 0.3 | − 45.3 |
| 0.4 | + 58.1 | 0.4 | − 36.8 |
| 0.5 | + 41.4 | 0.5 | − 29.3 |
| 0.6 | + 28.8 | 0.6 | − 22.5 |
| 0.7 | + 19.5 | 0.7 | − 16.4 |
| 0.8 | + 11.8 | 0.8 | − 10.6 |
| 0.9 | + 5.3 | 0.9 | − 5.2 |
| 1.0 | 0.0 | 1.0 | 0.0 |
| 1.2 | − 8.8 | 1.2 | + 9.5 |
| 1.4 | − 15.5 | 1.4 | + 18.3 |
| 1.6 | − 20.9 | 1.6 | + 26.4 |
| 1.8 | − 25.5 | 1.8 | + 34.2 |
| 2.0 | − 29.3 | 2.0 | + 41.4 |
| 2.2 | − 32.5 | 2.2 | + 48.3 |
| 2.4 | − 35.5 | 2.4 | + 54.9 |
| 2.6 | − 37.9 | 2.6 | + 61.2 |
| 2.8 | − 40.3 | 2.8 | + 67.3 |
| 3.0 | − 42.3 | 3.0 | + 73.2 |
| 4.0 | − 50.5 | 4.0 | + 100.0 |

註 a：$X_S = 1$，$X_D = 1$

b：$X_H = 1$

$X_H = 1$

$X_D = 1$

上式可簡化成

$$TVC = \left[\frac{TVC^*}{2}\right]\left[\frac{X_H + X_D X_S}{\sqrt{X_D X_S X_H}}\right] \tag{13-7a}$$

或是，

$$\frac{TVC - TVC^*}{TVC^*} = \frac{X_H + X_D X_S}{2\sqrt{X_D X_S X_H}} - 1 \tag{13-7b}$$

如果每次只考慮一個參數的變化，情形將分述如下：

假設 $X_D = 1$，$X_S = 1$，則 13-7b 式變成：

$$\frac{TVC - TVC^*}{TVC^*} = \frac{X_H + 1}{2\sqrt{X_H}} - 1 \tag{13-8a}$$

假設 $X_D = 1$，$X_H = 1$，則 13-7b 式變成：

$$\frac{TVC - TVC^*}{TVC^*} = \frac{X_S + 1}{2\sqrt{X_S}} - 1 \tag{13-8b}$$

假設 $X_S = 1$，$X_H = 1$，則 13-7b 式變成：

$$\frac{TVC - TVC^*}{TVC^*} = \frac{X_D + 1}{2\sqrt{X_D}} - 1 \tag{13-8c}$$

表 13-4 指出 $TVC$ 敏感性分析的結果：由表中的資料可清楚看出，非常的不敏感。例如任一參數變成實際值的 2 倍，則 $TVC$ 才增加 6.1%，由此可見一斑。

③ 最後，吾人亦可測試 $EOQ$ 本身的變化，對於 $TVC^*$ 的影響。假設 $X_Q$ 爲預估 $EOQ$ 對實際 $EOQ$ 的比值，亦即：

$$X_Q = \frac{\text{預估}EOQ}{\text{實際}EOQ} = \frac{Q}{Q^*}$$

則 $TVC$ 與 $TVC^*$ 之間的關係可簡化成

$$\frac{TVC - TVC^*}{TVC^*} = \frac{\frac{DS}{Q^* X_Q} + \frac{Q^* X_Q H}{2} HQ^*}{HQ^*}$$



$$= \frac{X_Q^2 - 2X_Q + 1}{2X_Q} \tag{13-9}$$

表 13-4　不同參數的預估誤差對 ~~$EOQ$~~ $TVC^*$ 的影響

| 任一參數的預估比值 $X_S$, $X_H$ 或 $X_D$ | $TVC^*$ 的變化百分比(%) $= \frac{TVC - TVC^*}{TVC^*}$ |
|---|---|
| 0.1 | 74.0 |
| 0.2 | 34.2 |
| 0.3 | 18.8 |
| 0.4 | 10.7 |
| 0.5 | 6.1 |
| 0.6 | 3.3 |
| 0.7 | 1.6 |
| 0.8 | 0.6 |
| 0.9 | 0.2 |
| 1.0 | 0.0 |
| 1.2 | 0.4 |
| 1.4 | 1.4 |
| 1.6 | 2.8 |
| 1.8 | 4.4 |
| 2.0 | 6.1 |
| 2.2 | 7.9 |
| 2.4 | 9.7 |
| 2.6 | 11.7 |
| 2.8 | 13.6 |
| 3.0 | 15.4 |
| 4.0 | 25.0 |

表 13-5 爲 13-9 式的計算結果。由表中亦可清楚看出，$TVC$ 對於 $EOQ$ 的變化非常不顯著，圖 13-14 亦指出這種觀念。這種觀念對於實務應用上非常重要；例如 $EOQ$ 的計算結果爲 286 單位，而實務上爲

了配合標準包裝或其他限制條件，使得採購部門希望能一次發出400單位的訂單（亦即增加率為 $\frac{400-286}{286}=40\%$），則這種變化僅使 $TVC$ 增加5.7%（見表13-5），以如此低比例的額外成本來換取作業上的方便，實提供管理人員有用的參考資訊。

表 13-5　EOQ 的變化對 TVC 的影響

| $EOQ$ 的變化 $(X_Q)$ | $\frac{TVCTVC^*}{TVC^*}$ |
|---|---|
| 0.1 | 405.0 |
| 0.2 | 160.0 |
| 0.3 | 81.7 |
| 0.4 | 45.0 |
| 0.5 | 25.0 |
| 0.6 | 13.4 |
| 0.7 | 6.4 |
| 0.8 | 2.5 |
| 0.9 | .6 |
| 1.0 | 0.0 |
| 1.2 | 1.7 |
| 1.4 | 5.7 |
| 1.6 | 11.3 |
| 1.8 | 17.8 |
| 2.0 | 25.0 |
| 2.2 | 32.8 |
| 2.4 | 40.9 |
| 2.6 | 49.3 |
| 2.8 | 57.9 |
| 3.0 | 66.7 |
| 4.0 | 112.5 |



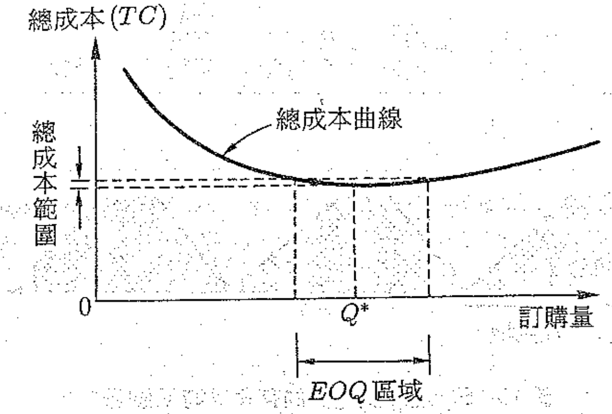



圖 13-14　$EOQ$ 的變化對總成本的影響圖

### 13-5-1-2　模式 2：經濟生產批量 $(EPQ)$

$EPQ$ 模式的假設條件為：(1)對未來的情況預測是確定的，(2)需求是均勻（固定）的，(3)物料均勻(uniform)送達，(4)物料價格固定，而無任何數量折扣。顯然地，$EPQ$ 與前節 $EOQ$ 模式最大的區別在於物料的送達方式，$EOQ$ 為一次送達，而 $EPQ$ 是均勻送達；一般而言，廠內自行生產的情形頗適合這種假設條件。因此，$EPQ$ 模式的訴求重點在於每次應生產多少批量而使總成本為最小；這種經濟**生產批量**(economic production run size)頗類似前節的 $EOQ$。此外，$EPQ$ 也假設物料是一面生產與一面使用，生產率 $(p)$ 大於需求率 $(d)$，且不允許缺貨故無缺貨成本；其存貨與時間的關係如圖 13-15 所示。$EPQ$ 之總成本為：

$$TC = \text{持有成本} + \text{整備成本} + \text{物品成本}$$

$$= \left(\frac{I_{max}}{2}\right)H + \left(\frac{D}{Q}\right)S + PD \qquad (13\text{-}10)$$

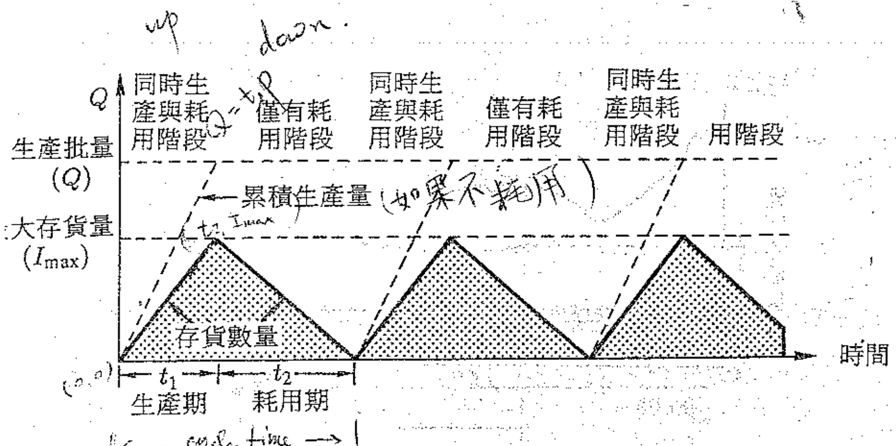



圖 13-15　經濟生產量的存貨與時間關係

週期時間 time between two successive start-ups.

其中，$I_{max}$ 指在一生產期間之最大存貨水準。

由 13-15 式中以 $TC$ 對 $Q$ 微分令其等於零可以求出最小總成本的生產批量 $Q^*$ 如 13-11 式：

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\sqrt{\frac{p}{p-d}} \qquad (13\text{-}11)$$

其中，$p$ = 生產率（每單位時間的生產量）

$d$ = 使用（需求）率

公式之導出步驟如下：從圖可知 $\frac{I_{max}}{t_1}$ = 斜率 = $(p-d)$　$t_2$ 耗用期（不生產）

① $I_{max}=(p-d)t_1$（$t_1$ 指生產時間）

② 平均存貨量爲三角形之面積 $=\frac{1}{2}$（底×高）

$$=\frac{1}{2}(p-d)t_1\cdot(1)=\frac{I_{max}}{2}$$

其中 $t_1=\frac{Q}{p}$ 故平均存貨量 $=\frac{1}{2}(p-d)\cdot\frac{Q}{p}$　在 $t_1$ 之間 物品以 $p$ 生產。

③ $TC=\frac{(p-d)}{2}\cdot\frac{Q}{p}\cdot H+\frac{D}{Q}S+P\cdot D$

$$\frac{d(TC)}{dQ}=\frac{1}{2}\frac{(p-d)}{p}\cdot H-\frac{DS}{Q^2}=0$$



$$\Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\cdot\sqrt{\frac{p}{p-d}}$$

$$故 I^*_{max}=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\cdot\sqrt{\frac{p-d}{p}} \qquad (13\text{-}12)$$

$=(p-d)\frac{Q}{p}$　$Q$ 以 $Q^*$ 代入

當計算出 $Q^*$ 後，即可求算生產時間 $t_1$(Run time)與批次循環時間 (Cycle time)$t_1+t_2$：

$$t_1=\frac{Q^*}{p}=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\cdot\sqrt{\frac{1}{p(p-d)}}$$

$Q^*$ 須滿足 $T\cdot d$

$$t_1+t_2=\frac{Q^*}{d}=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\cdot\sqrt{\frac{p}{d^2(p-d)}}$$

$Td=Q^*$　$T=\frac{Q^*}{d}$　$t_2$ 用 $T-t_1$ 求得

**例 13-2**

已知某玩具製造廠每年使用 48,000 個橡皮輪胎，製造玩具卡車。這種橡皮輪胎係由該公司自製，每天產量 800 個，而玩具卡車之裝配在工廠是終年均勻的生產，持有成本每個輪子一年是 1 元，整備成本每生產批次為 45 元，該公司一年生產天數為 240 天，試求下列問題之解答：

① 最佳之生產批量 (Optimize run size)

② 最小成本（不計物品本身的成本）

③ 最佳批量之循環時間

④ 生產時間

**解**：由題可知

經濟批量 $Q=pt_1$　$\therefore t_1=\frac{Q}{p}$

$D=48,000$ 個／年

$S=45$ 元／次

$H=1$ 元／每個，每年

$p=800$ 個／天

$$D = 48{,}000\text{ 個／年或是 } d = \frac{48{,}000}{240} = 200\text{ 個／天}$$

故① $Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}}\sqrt{\frac{p}{p-d}} = \sqrt{\frac{2(4800)45}{1}} \cdot \sqrt{\frac{800}{800-200}}$

$= 2400$（個）

② $TC_{min} =$ 持有成本＋整備成本

$= \left(\frac{I_{max}}{2}\right)H + \left(\frac{D}{Q}\right)S$

其中，$I_{max} = \sqrt{\frac{2DS}{H}}\sqrt{\frac{p-d}{p}}$

$= \sqrt{\frac{2(48000)45}{1}} \cdot \sqrt{\frac{800-200}{800}}$

$= 1800$（個）

代入可得 $TC_{min} = \frac{1800}{2} \times 1 + \frac{48000}{2400} \times 45$

$= 900 + 900 = 1800$（元）

③ 批量循環時間 $(t_1 + t_2) = \frac{Q^*}{d} = \frac{2400}{200} = 12$（天）

④ 生產時間 $(t_1) = \frac{Q^*}{p} = \frac{2400}{800} = 3$（天）

### 13-5-1-3 模式 3：數量折扣模式

前述二個模式均未考慮**數量折扣**(Quantity Discount)的情況；當有數量折扣時，模式的總成本就會受到影響，經濟訂購量（或生產量）亦會隨之改變，因為有數量折扣多發生在外購的情況，故本節以經濟訂購量模式 $(EOQ)$ 來說明考慮數量折扣後之最小成本訂購量如何決定。（事實上，若考慮自製也有折扣的情形，其推導過程亦完全一樣，只不過 $EPQ$ 與 $EOQ$ 的公式不同而已，故予以省略）



當有數量折扣時總成本曲線會變化如圖 13-16(a)、(b) 所示，會有二種情形；一種是存貨之持有成本為固定與物品單價無關，則各種價格的總成本曲線有相同的 $EOQ$，但總成本不同，如圖 13-16(a) 所示，單價愈低，則總成本愈低。另一種則如圖 13-16(b)，持有成本與購買單價有關，當價格愈低（折扣愈高）則 $EOQ$ 就愈大，因此每當價格愈低則其總成本曲線的 $EOQ$ 就會向右移。總之，要決定最低成本的訂購量之程序需分成二種情況，如下說明：

1. 當持有成本為固定時 價格折扣！

【步驟 1】：

計算一般的 $EOQ$

【步驟 2】：

只有一條成本曲線之 $EOQ$ 是落於可行區域的數量範圍之內，確認該成本曲線，

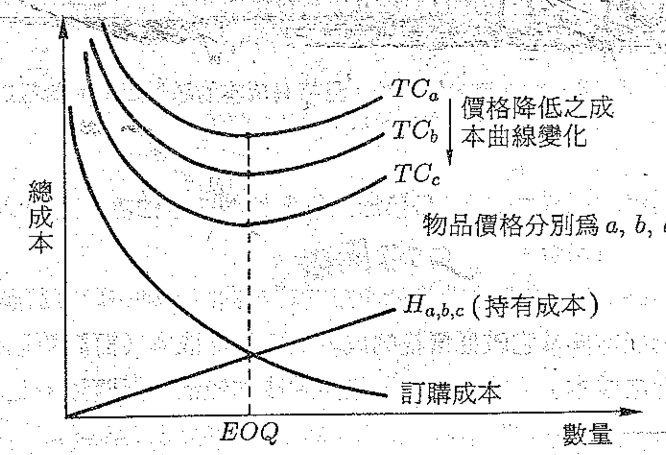



圖 13-16(a) 有數量折扣，且持有成本為固定下之總成本曲線與 $EOQ$ 之關係

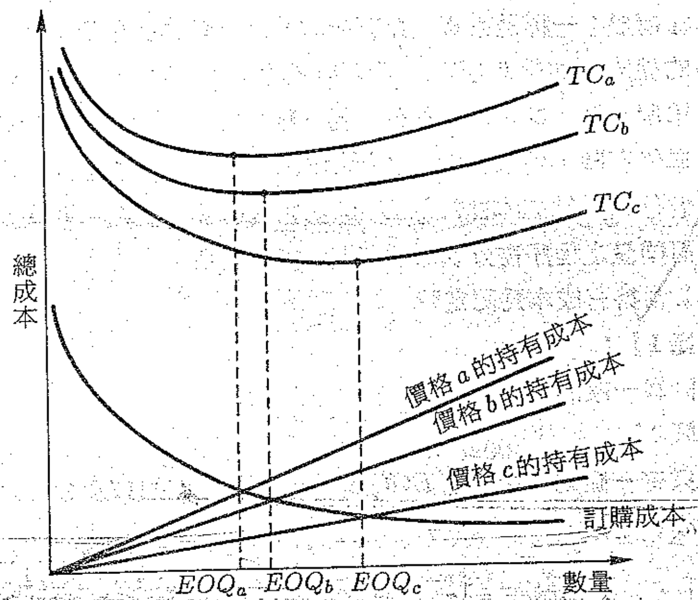



圖 13-6(b) 有數量折扣，且持有成本附單價降低而降低之總成本曲線與 $EOQ$ 之關係

(a) 如果該可行之 $EOQ$ 是落於最低價格的成本曲線，則 $EOQ$ 即是最佳的訂購量。

(b) 如果 $EOQ$ 之數量非最低價格的成本曲線，則需計算訂購 $EOQ$ 的總成本與其它較低價格的成本曲線之總成本（訂購可取得折扣數量之成本），加以比較，選擇總成本較低的訂購量。

**例 13-3**

某醫院之工務部門每年使用 816 箱清潔液，每次訂購成本為 12 元，持有成本每年每箱 4 元，其一次購買數量不同價格就不同，條件如下：少於 50 箱，則每箱單價為 20 元，購買 50～79 箱則單價為 18 元，購買 80～99 箱，單價為 17 元，超出 100 箱則單價為 16 元，試求最佳的訂購量與總成本為何？



解：由題意知：

$$D = 816\text{ 箱／年}$$

$$S = 12\text{ 元／次}$$

$$H = 4\text{ 元／每箱，每年}$$

價格折扣範圍：

| 訂購數量 | 價格 |
|---|---|
| 0～49 | 20 元／箱 |
| 50～79 | 18 元 |
| 80～99 | 17 元 |
| 100 以上 | 16 元 |

總成本曲線如圖 13-17，有相同的 $EOQ$，但數量範圍不同，成本曲線亦隨之變化，可行區形成之曲線成為鋸齒狀（實線部分）。

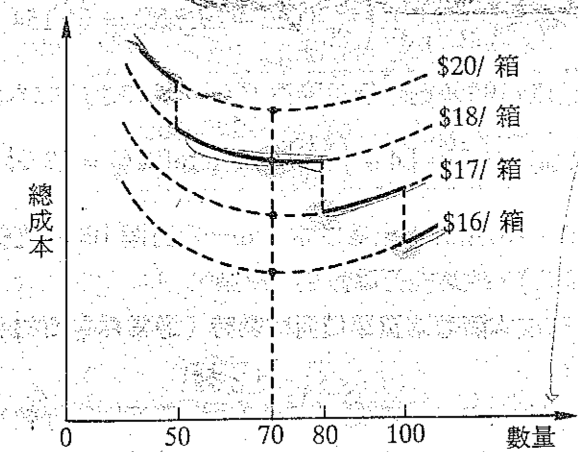



圖 13-17 持有成本固定時之總成本曲線

【步驟 1】：

先計算 $EOQ$，$EOQ=\sqrt{\dfrac{2DS}{H}}=\sqrt{\dfrac{2(816)12}{4}}=70$（箱）

【步驟 2】：

(a) 檢查 $EOQ$ 之數量其之可行價格為 18 元／箱，（不是最低價格之範圍），其總成本為：

$$TC_{70}=\text{持有成本}+\text{訂購成本}+\text{購買成本}$$

$$=\left(\frac{Q}{2}\right)H+\left(\frac{D}{Q}\right)S+P\cdot D$$

$$=\left(\frac{70}{2}\right)+\left(\frac{816}{70}\right)12+18(816)$$

$$=14,968\text{（元）}$$

因其非最低價格之購買數量故還要進行總成本之比較。

(b) 如果一次訂購 80 箱則其價格可以降低為每箱 17 元，成本為：

$$TC_{80}=\left(\frac{80}{2}\right)4+\left(\frac{816}{80}\right)12+17(816)=14,154\text{（元）}$$

若一次訂購 100 箱則單價可降為 16 元，此時之總成本為：

$$TC_{100}=\left(\frac{100}{2}\right)4+\left(\frac{816}{100}\right)12+16(816)=13,354\text{（元）}$$

比較 (a)，(b) 所計算出總成本，知一次訂購 100 箱之總成本最低 (13,354 元)，故最佳訂購量為 100 箱。

2. 當持有成本隨著購買單價而變動時（通常為單價的百分比）

【步驟 1】：

以最低折扣價開始，計算其 $EOQ$，如果落於可行數量區域內即為最佳解，若非屬於可行數量內，則以次高價格計算其 $EOQ$，一直進行直到找到一個可行 $EOQ$ 為止。

【步驟 2】：

如果計算出之可行 $EOQ$ 非屬於最低價格之範圍，則計算每一個比可行 $EOQ$ 之價格還低的訂購數量之總成本來加以比較，總成本最低者即為最佳訂購量。



### 例 13-4

某電子公司每年使用 4,000 個電子開關零件，其購買單價隨購買數量之大小而有所不同，其範圍如下：1～499 個之單價為 0.9 元，500～999 之單價為 0.85 元，超出 1,000 個單價為 0.82 元。每次訂購的成本為 0.18 元，持有成本每個每年為單價的 18%，試求最佳訂購量及年度總成本。

解：由題意可知

$$D=4,000\text{ 個／年}$$

$$S=18\text{ 元／次}$$

$$H=0.18\,P$$

其購買數量與單價之關係：

| 數量範圍 | 購買單價（元／個） | 每單位持有成本（元／個，年） |
|---|---|---|
| 1～499 | 0.9 | 0.18 × 0.9 = 0.162 |
| 500～999 | 0.85 | 0.18 × 0.85 = 0.153 |
| 1,000 個及以上 | 0.82 | 0.18 × 0.82 = 0.1476 |

【步驟 1】：

以最低價格，計算其 $EOQ$，看是否落於可行之數量範圍內，若符合即為最佳解。

$$EOQ_{0.82}=\sqrt{\frac{2DS}{H}}=\sqrt{\frac{2(4000)18}{0.1476}}=988\text{（個）}$$

但 988 個之單價範圍是 0.85 而非 0.82，故為不可行的 $EOQ$，以次高價格再計算 $EOQ$。

$$EOQ_{0.85}=\sqrt{\frac{2(4000)18}{0.153}}=970\text{（個）}$$

爲可行的 $EOQ$，進行步驟 2。

【步驟 2】：

計算訂購 970 個的總成本與其價格較低的訂購量（在本例爲 1,000 個）之總成本比較，較低者即爲最佳訂購量。

$$TC_{970}=\left(\frac{970}{2}\right)(0.153)+\left(\frac{4000}{970}\right)18+0.85(4000)=3,548\text{元}$$

$$TC_{1000}=\left(\frac{1000}{2}\right)(0.1476)+\left(\frac{4000}{1000}\right)18+0.85(4000)=3,426\text{元}$$

因此最佳訂購量爲 1000 個，總成本爲 3,426 元。其圖示如圖 13-8。

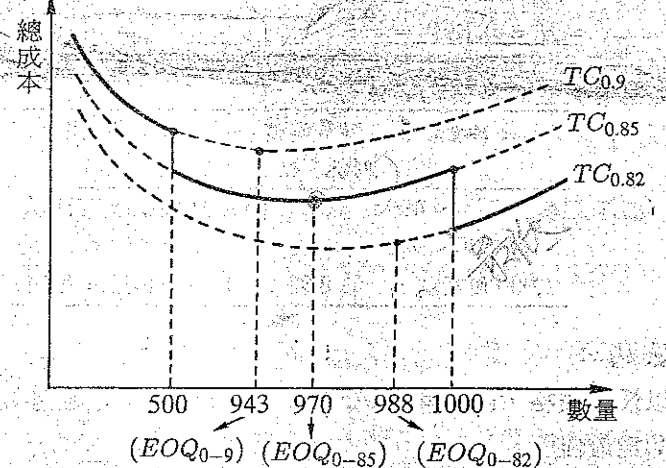



圖 13-18

### 13-5-1-4　模式 4：經濟訂購期間模式 ($EOI$)

經濟訂購期間(Economic Order Interval)模式在確定的情況之下和 $EOQ$ 有密切的關係，其公式是由 $EOQ$ 轉變而來；但當需求爲變動的情況或前置時間變動則需考慮安全存量與服務水準，此將在 13.5.2 說明。$EOI$ 模式之假設條件與前面 $EOQ$ 模式相同，亦即(1)未來情況的預測是確定的，(2)均勻需求，(3)物料一次送達，前置時間固定，(4)沒有數量折扣，價格固定；而且爲確定情況故不考慮缺貨成本。其公式之導出如下：



$TD=Q$

假設經濟訂購期爲 $T^*$，則因爲經濟訂購量爲 $Q^*$，故可由全年的需求量 $D$ 求得 $T^*=\frac{Q^*}{D}$，表示每隔 $T^*$ 時間後即訂購一次，同時將 $Q^*=\sqrt{\frac{2DS}{H}}$ 代入可得：

$\frac{D}{Q}=$ 次數

$$T^*=\sqrt{\frac{2DS}{H}}\cdot\frac{1}{D}=\sqrt{\frac{2S}{DH}} \tag{13-15}$$

$$\begin{aligned}
\text{總成本}TC^* &= \frac{Q^*}{2}H+\frac{D}{Q^*}S+P\cdot D\\
&= \frac{H}{2}\sqrt{\frac{2DS}{H}}+\sqrt{\frac{D^2S^2H}{2DS}}+P\cdot D\\
&= \sqrt{\frac{DSH}{2}}+\sqrt{\frac{DSH}{2}}+P\cdot D\\
&= 2\sqrt{\frac{DSH}{2}}+P\cdot D\\
&= \sqrt{2DSH}+P\cdot D
\end{aligned} \tag{13-16}$$

**例 13-5**

丙公司對於某一產品（單價為$20），每年需訂購 16,000 個，每次的訂購成本是$60，而每年單位存貨的持有成本為$3，試問其經濟訂購期間與總成本為何？（假設每年有 250 個工作天）

**解**：由公式 13-15 與公式 13-16 可求解，分別為：

經濟訂購期間

$$T^* = \sqrt{\frac{2S}{DH}} = \sqrt{\frac{2(60)}{(16,000)(3)}}$$

$$= 0.05\text{ 年} = 0.05 \times 250 = 12.5\text{ 天}$$

$$\text{總成本}TC^* = \sqrt{2DSH} + PD$$

$$= \sqrt{2(16000)(60)(3)} + (20)(16,000)$$

$$= \$322,400\text{ 元}$$

### 13-5-1-5　模式 5：固定訂購量但允許缺貨

前述之確定情況下均未考慮缺貨成本，本模式之假設條件和 $EOQ$ 模式相同，但將其原先不允許缺貨之條件放寬為，在不喪失銷售機會下允許補貨，其同時考慮之成本形式有四種：持有成本、訂購成本、貨品成本、與缺貨成本，其情況可如圖 13-19 所示。圖中之 $b$ 為缺貨數量，$C_b$ 為每單位時間內每個之缺貨成本。

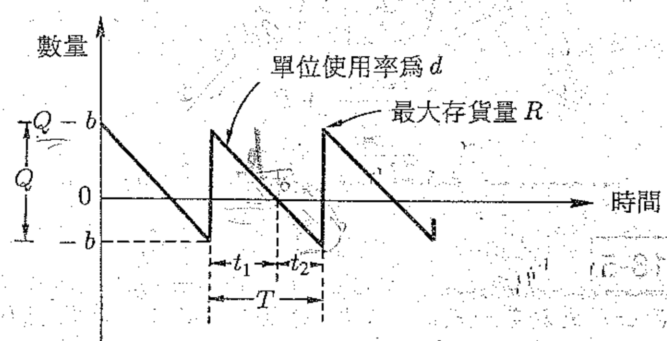



圖 13-19　$EOQ$，允許缺貨情況

允許缺貨之總成本為：

$$TC = \text{持有成本} + \text{訂購成本} + \text{缺貨成本} + \text{購買成本}$$



$$= \frac{(Q-b)^2}{2Q}H + \frac{D}{Q}S + \frac{b^2}{2Q}C_b + P\ D \qquad (13\text{-}17)$$

公式之推導過程如下：

① 平均存貨量為

$$\frac{1}{2}(Q-b)\cdot t_1 = \frac{1}{2}(Q-b)\cdot\frac{Q-b}{d}$$

$$= \frac{1}{2}(Q-b)\cdot(Q-b)\cdot\frac{1}{Q}$$

$$= \frac{(Q-b)^2}{2Q}$$

其中 $t_1 = \dfrac{Q-b}{d}$

② 缺貨數量為 $\dfrac{1}{2}b\cdot t_2 = \dfrac{1}{2}(b)\left(\dfrac{b}{d}\right) = \dfrac{b^2}{2Q}$

（因為 $t_2 = T - t_1 = \dfrac{Q}{d} - \dfrac{Q-b}{d} = \dfrac{b}{d}$

欲求使 $TC$ 為最小，則以 $TC$ 對 $Q$ 偏微分令其為零，同時以 $TC$ 對 $b$ 偏微分令其等於零求解出 $Q^*$ 與 $b^*$ 即可。

$$\frac{\partial(TC)}{\partial Q} = \left[\frac{2Q(2(Q-b)) - (Q-b)^2\cdot 2}{4Q^2}\right](H) - \frac{DS}{Q^2} - \frac{b^2C_b}{2Q^2}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{Q^2-b^2}{2Q^2}\right]H - \frac{DS}{Q^2} - \frac{b^2C_b}{2Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow (Q^2-b^2)H - 2DS - b^2C_b = 0$$

$$\Rightarrow Q^2H - (H+C_b)b^2 = 2DS \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$\frac{\partial(TC)}{\partial b} = \frac{2(Q-b)(-1)}{2Q}H + \frac{2b}{2Q}C_b = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(Q-b)}{Q}H = \frac{b}{Q}C_b$$

$$\Rightarrow (Q-b)H = bC_b \rightarrow b(H+C_b) = Q \cdot H$$

$$\Rightarrow b = \frac{H}{H+C_b}Q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

將 (A) 代入 (B) 得：

$$Q^2H - (H+C_b)\left[\left(\frac{H}{H+C_b}\right)^2 Q^2\right] = 2DS$$

$$\Rightarrow Q^2H - \frac{H^2Q^2}{H+C_b} = 2DS$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{H}{H+C_b}\right)HQ^2 = 2DS \rightarrow \left(\frac{C_b}{H+C_b}\right)HQ^2 = 2DS$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{2DS}{H} \cdot \frac{H+C_b}{C_b}$$

$$\Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \cdot \sqrt{\frac{H+C_b}{C_b}} \qquad (13\text{-}17)$$

$$b^* = \frac{H}{H+C_b} Q^* \qquad (13\text{-}18)$$

**例 13-6**

RCB 電子公司使用某種昂貴的電視零件，已知每年使用 800 個且使用率為固定；而零件每個單價固定為 125 元，訂購成本為每次 40 元，持有成本為單價的 20%（每年），缺貨成本估計每個每年為 60 元，試求最佳訂購量與最佳缺貨數量使總成本最小。

**解**：已知，$D = 800$ 個／年

$H = 0.2 \times 125 = 25$ 元／每個每年

$S = 40$ 元／次

$C_b = 60$ 元／每個每年



依公式 13-7，13-8 可求得

$$Q^* = \sqrt{\frac{2(800)(40)}{25} \cdot \frac{25+60}{60}} = 60 \text{（個）}$$

$$b^* = \left(\frac{25}{25+60}\right) \cdot 60 = 18 \text{（個）}$$

## 實例 13-1：PFIZER 製藥公司的存貨管理

Pfizer 製藥公司為一垂直整合的公司，該公司在 65 個國家生產，主要有農業、特殊化學、材料科學、消費性產品與健康用品五大事業領域。該公司在 1980 年代由於高利率與高存貨數量及藥品市場的急速成長，而開始注意到存貨管理的重要性。事業部的管理當局開始進行一系列的存貨改進計畫：①控制及增進存貨週轉率，②了解造成存貨急速增加的原因，③改善存貨金額預測的精確性及資金流量。

在初步的階段，該公司分析存貨管理的功能，發現有下列的問題與機會：

① 缺乏一個精確與適度詳細的資料來做存貨管理之用，亦不了解存貨管理績效如何。

② 存貨管理的職責分散在各個不同的部門，原料與在製品 (WIP) 是由各當地工廠負責，成品存貨則由總公司生產規劃與存貨控制 (PPIC) 部門負責。

③ 在各個工廠的績效評估目標中並未包含存貨項目。

④ 存貨資料只有總合的資料，無法做有意義的趨勢分析或了解管理當局之做法對存貨有何影響。

⑤ 個別的工廠存貨管理方法並不一致。

⑥ 存貨管理的方法陳舊，沒有利用現代的存貨管理模式與工具。

⑦ 存貨預測為人工的，耗時、不精確且非固定的工作。

量及前置時間，譬如，曲軸箱的某個零件安全存量是3000件，前置時間是由機械課提出，經與公務課協商定案後，交由採購課和生產管理課輸入電腦，修改原先的存貨管理模式。

3. 存貨管理系統：由於機車引擎是單價高、數量較少的零件，所以是A類的存貨。所有中壢廠生產線組裝完成的引擎，都會立刻裝入貨櫃箱中，裝滿的貨櫃則會在當天或隔天早上，迅速送到新竹廠，配合新竹廠生產的其他零件、協力廠商的外購零件和日本的原廠零件，一起組裝成整臺機車。因此原則上中壢廠並沒有任何引擎成品的存貨，也就沒有成品的存貨管理問題，而是完全配合新竹廠的整車裝配生產的計畫。

4. 存貨管理的績效評估：評估方式為每月實施存貨小盤點，每半年大盤點一次，即循環盤點，評估重點為：安全存量的達成率、物料帳目相符合的程度、政策的執行成果。

## 13-5-2 風險與不確定性情況之模式

當未來的情況爲風險 (risk) 或不確定 (Uncertainty) 時，要決定訂購的數量與時機就要利用機率學的原理來制定管理決策，本節將說明的方法包括了：(1)安全存量 (Safety stock) 與服務水準 (Service level) 模式，(2)報童模式 (News boy Model)，(3)模擬法，與(4)決策理論等四種途徑來解決風險與不確定情況下的存貨問題；此外，本節所指風險與不確定是專指需求率與前置期間二個參數而言，其它影響之要素並未加以考慮而假設其爲固定。

### 13-5-2-1 安全存量與服務水準模式 需求確定 不需安全存貨

*EOQ*模式假定需求率與前置時間是固定的，因此可以不需要安全存量(Safety stock)，而再訂購點 ($r$) 即是前置時間乘上每日（或週、月）之需求量 ($r = d \times L$)；但是如果需求率或前置期間會變動（亦

$r = d \times L$

可能會有不同組合

需求固定 變動 變動　前置變動 固定 變動



即爲隨機變數），則再訂購點之數量受安全存量與所提供之服務水準所影響；以下加以討論三種情形，所用之符號意義如下：

固定 $d$ = 每單位時間之固定需求率（全年之和則爲 $D$）

變動 $\bar{d}$ = 平均或期望需求率

$\sigma_d$ = 需求率分配的標準差

固定 $L$ = 固定前置時間 (Lead Time)

變動 $\bar{L}$ = 平均前置時間

$\sigma_L$ = 前置時間分配的標準差

$SF$ = 安全存量數目

$SL$ = 服務水準（爲不缺貨的機率）

一般再訂購點之公式爲：

$r$ = 在前置期間之期望（平均）需求量 + 安全存量

即 $$r = \bar{d} \cdot \bar{L} + SF \tag{13-19}$$

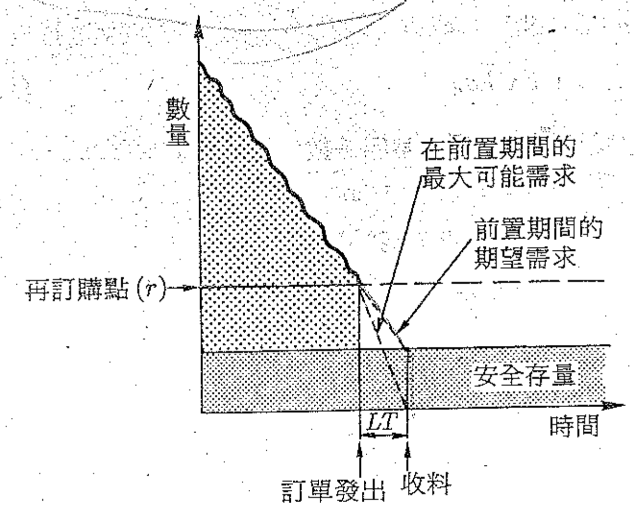



圖13-20 安全存量減少缺貨的風險（由於需求率與前置期間的變化）

但安全存量之數量 ($SF$) 受(1)所欲提供之服務水準，(2)需求率與前置時間變化幅度及(3)平均需求率 ($\bar{d}$)、平均前置期間 ($\bar{L}$) 之大小而定，如圖 13-20 之情況。圖中指出預期的前置時間與需求率若超過實際值時，則會有缺貨的情形產生，因而需要安全存量。而此安全存量的大小除了因需求率與前置時間的變化而改變外，亦會受公司存貨政策（例如服務水準的設定）的影響。以下各個模式即是以這三個變數組合而成的。

**模式 6：需求率變動，前置時間固定模式**

當需求率變動每日之間是相互獨立的情況下，我們可以常態分配來計算其平均日需求量與標準差，配合公司之服務水準政策即可決定安全存量的大小；在前置期間的總需求量即為每日平均（期望）需求量的總和 ($\bar{d}\cdot L$)，標準差則為前置期每日變異數的總和開根號 ($\sqrt{L}\sigma_d$)，服務水準則為在前置期間內不缺貨的機率，如圖 13-21 所示。

例如平均每日需求量為 7 個，標準差為 2 個，前置期間為 10 天，則在前置期間內之平均（期望）需求為 $7 \times 10 = 70$ 個，前置期間需求量變化的標準差為 $2\sqrt{10}$，其再訂購點之公式則為：

$$r = \bar{d}\cdot L + SF$$

前置期間需求的標準差

$$= \bar{d}\cdot L + Z\sqrt{L}\sigma_d \qquad (13\text{-}20)$$

$Z\ \sigma_{dL}$

（$Z$ 為特定服務水準之標準常態係數，見附錄）

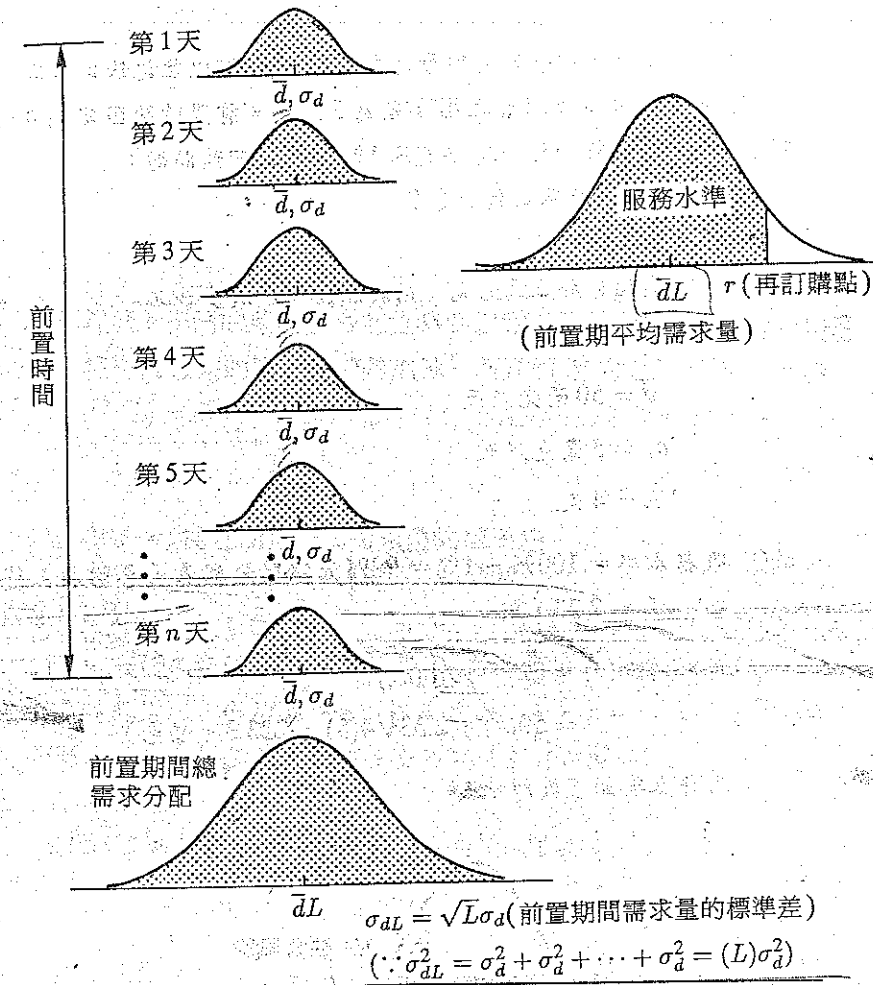



圖 13-21　前置期間總需求之常態分配與服務水準

## 例 13-7

某藥店藥劑師平均每日使用量為 50 毫克，根據以往記錄每日需求量呈常態分配，每日需求量之標準差為 5 毫克，前置時間固定為 4 天，該藥劑師希望缺貨的機率不要超過 1%，試求下列問題：

① 決定再訂購點 $(r)$ 應為幾毫克？

② 需準備多少安全存量？

③ 如果再訂購點訂於 215 毫克，則其服務水準為多少？

**解**：由題知：

$$\bar{d} = 50 \text{ 毫克／天}$$

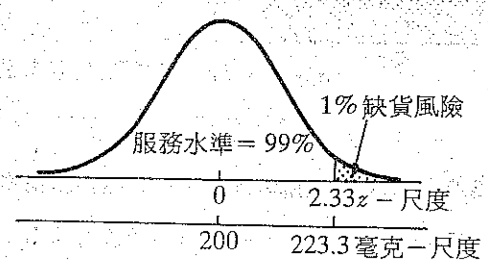
$$\sigma_d = 5 \text{ 毫克／天}$$

$$L = 4 \text{ 天}$$

故① 服務水準 $= 100\% - 1\% = 99\%$ 查常態分配表（見附錄）得知，$Z = 2.33$，則

$$\text{再訂購點}(r) = \bar{d}L + z\sqrt{L}(\sigma_d)$$
$$= 50(4) + 2.33\sqrt{4}(5) = 223.3 \text{（毫克）}$$

服務水準如下圖所示。

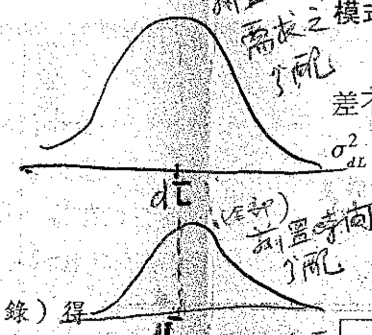



② 安全存量

$$(SF) = z\sqrt{L}\cdot\sigma_d = 2.33\cdot\sqrt{4}(5) = 23.3 \text{（毫克）}$$

在固定需求 前置時間之總需求呈常態分配

Distribution of demand during lead time




③ 當再訂購點訂於 215 毫克時，其服務水準之計算為：

$$z = \frac{r - 200}{\sqrt{L}\cdot\sigma_d} = \frac{215 - 200}{\sqrt{4}(5)} = 1.5$$

$u = \bar{d}\,L$

$\sigma_{dL} = \sqrt{L}\,\sigma_d$

查表可得服務水準為 93.32%，由此可見其降低再訂購點會增加缺貨的機率（亦即降低了服務水準）。

### 模式 7：需求率固定，前置時間變動模式

與模式 6 相同的假設是令前置時間變動為常態分配，但是其標準差不是將在前置期的需求標準差加總，而是固定的值（因為變異數 $\sigma^2_{dL} = \sigma^2(dL) = d^2\sigma^2_L$，所以 $\sigma_{dL} = d\sigma_L$）故其再訂購點的公式為：

$u = d\,\bar{L}$

$\sigma_{dL} = d\cdot\sigma_L$

$$r = d\bar{L} + z\cdot d\cdot\sigma_L \tag{13-21}$$

其中 $d\cdot\sigma_L$ 為在前置期間需求量的標準差。

## 例 13.8

某工廠的自動燃燒機每日使用 2.1 加侖的石油，石油購買的前置時間呈常態分配，平均為 6 天，標準差為 2 天，工廠的服務水準政策為 98%，試求應準備多少的要安全的存量與再訂購點？

**解**：由題意可知，$d = 2.1$ 加侖／天，$\bar{L} = 6$ 天，$\sigma_L = 2$ 天，$z = 2.055$（查表），故再訂購點（應用 13-21 式）

$$r = d\bar{L} + zd\sigma_L = 2.1(6) + 2.055(2.1)2 = 21.23 \text{（加侖）}$$

$$\text{安全存量} = z\cdot d\sigma_L = 2.055(2.1)2 = 8.61 \text{（加侖）}$$

### 模式 8：需求率變動，前置時間變動模式

當需求率與前置時間同時均會變動時，顯然的要準備較多的安全存量（與前述幾種情況相比），以應付增加的變動幅度。假設其均為常態分配，則在前置期間的總需求亦為常態分配其平均需求量為 $\bar{d}\bar{L}$，標準差為需求率的變異數與前置期的變異數之和的開根號，即為

$u = \bar{d}\,\bar{L}$

$\sigma_{dL} =$

$\sqrt{\sigma^2_{de} + \sigma^2_{LT}}$

$\sqrt{\sigma_{de}^2+\sigma_{LT}^2}$，而其中 $\sigma_{de}=\sqrt{\bar{L}}\sigma_d$，$\sigma_{LT}=\bar{d}\sigma_L$，因此前置期間需求率的標準差 $(\sigma_{dL})$ 如下式：

$$\sigma_{dL}=\sqrt{(\sqrt{\bar{L}}\sigma_d)^2+(\bar{d}\sigma_L)^2}=\sqrt{\bar{L}\sigma_d^2+\bar{d}^2\sigma_L^2} \tag{13-22}$$

再訂購點為：

$$r=\bar{d}\cdot\bar{L}+z\sqrt{\bar{L}\sigma_d^2+\bar{d}^2\sigma_L^2} \tag{13-23}$$

**例 13-9**

某餐廳販賣啤酒，已知每日消費為常態分配，平均為每日 150 罐，標準差每日為 10 罐；交運時間亦呈常態分配，平均為 6 天，標準差為 1 天，試求該餐廳欲維持在 90% 的服務水準下之再訂購點應為多少？

**解**：已知

$\bar{d}=150$ 罐／天，$\bar{L}=6$ 天

$\sigma_d=10$ 罐／天，$\sigma_L=1$ 天，$z=1.28$（查表得知）

再訂購點為：

$$r=\bar{d}\cdot\bar{L}+z\sqrt{\bar{L}\sigma_d^2+\bar{d}^2\sigma_L^2}$$
$$=150(6)+1.28\sqrt{6(10)^2+150^2(1)^2}$$
$$=900+1.28\sqrt{23100}=1095\ (\text{罐})$$

**模式 9：固定訂購期間模式（需求率變動，前置時間固定）**

在固定訂購期間模式之情況，若需求率與前置時間是固定的則以 $EOQ$ 求算固定訂購期（即前述的模式 4，$EOI$）即可，但若需求率與前置期是變動的，則同樣要考慮安全存量與服務水準來決定在固定期間內要訂購的數量為多少，此處僅說明需求率變動，前置時間固定之情況。



由於訂購期間是固定的，因此所準備的安全存量除了要應付前置期間的需求外，亦要應付在訂購時距（二次訂購時間的間隔，$OI$）內的需求，所以一般而言 $EOI$ 要比固定訂購量模式之安全存量多，其可用圖 13-22 表示，前置期間 $(L)$ 與訂購時距 $(OI)$ 之總和稱為保護期間(Protection interval)。

L：前置時間（固定）

→ OI：訂購時間：連續兩訂單之間時間

OI＋L＝保護期間

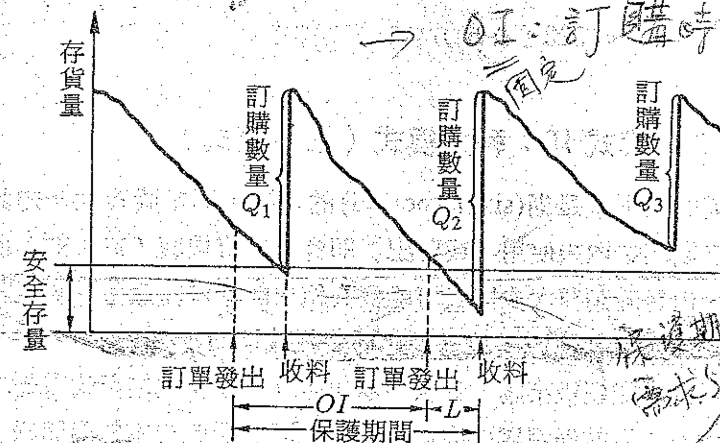



圖 13-22 需求率變動下的固定訂購期模式

保護期間需求分配

$\bar{d}(OI+L)$

保護期間 $\sigma_{d(OI+L)}=\sigma_d\sqrt{OI+L}$

在固定的訂購期間內，每一次訂購的數量視其現有庫存量而決定，故每次訂購數量不一定相同，其公式如下：

訂購數量＝在保護期間之平均需求量＋安全存量－庫存量

$$\text{即}Q=\bar{d}(OI+L)+z\sigma_d\sqrt{OI+L}-A \tag{13-24}$$

（$A$ 表示庫存量） 手上庫存量 R.V

**例 13-10**

已知某造紙廠採固定訂購期模式，但需求率會變動，且呈常態分配，有關資料如下：$\bar{d}=30$ 公斤／天，服務水準＝99%，$\sigma_d=3$ 公

各種變數的機率分配情況與數值，加以反覆比較各種情況來求得最小總成本的存貨決策。

假設需求率是變動的，且同時要考慮訂購成本、持有成本與缺貨成本，根據歷史資料，公司產品需求率之分配如下：

| 每週需求量（單位） | 機率 |
|---|---|
| 15 | 0.5 |
| 20 | 0.4 |
| 25 | 0.1 |

公司欲考慮是二週訂一次或一週訂一次之成本較低，已知，每次訂購成本爲 20 元，每單位（瓶）每週之持有成本爲 0.75 元，缺貨成本每單位爲 10 元，此時即可利用電腦來模擬各種可能需求狀況來制定決策。

由以往需求歷史記錄可知其每週的平均需求量爲 18 單位（$18 = 0.5(15) + 0.4(20) + 0.1(25)$），在電腦中可應用 Monte Carlo 模擬隨機亂數（見附錄 B）並得出模擬的需求量（即由 0～99 之數字中抽選若產生值爲 00～49 之間數目則需求量爲 15 個單位，其機率爲 50%，若產生值爲 50～89 之間數目則需求量爲 20 個單位，機率爲 40%，產生值爲 90～99 間之數目則需求量爲 25 個單位，機率爲 10%），即可計算各種情況下的總成本。假設模擬 10 週的需求量，且每週買一次數量爲 18 個單位，則存貨情況如下表 13-6。

在表 13-6 中顯示模擬 10 週的需求量及其所產生的存貨與缺貨情況，其總成本（每週）爲：

$$TC = 20 + (9.45 \times 0.75) + (0.9 \times 10) = 36 \text{（元）}$$

如果每二週才訂購一次，則存貨與缺貨情況如表 13-7，總成本爲每週 30 元 $\left(30 = \left(\frac{1}{2}\right)20 + \left(\frac{183}{10}\right)(0.75) + \left(\frac{6}{10}\right)(10)\right)$



表 13-6　一週訂購一次之模擬結果

| 週 (a) | 訂貨（收貨）(b) | 期初存貨 (c) | 模擬需求量 (d) | 期末存貨 (e) | 平均存貨 ($f = [c+e] \div 2$) | 缺貨（欠撥）(g) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 18 | 18 | 15 | 3 | 10.5 | 0 |
| 2 | 18 | 21 | 20 | 1 | 11.0 | 0 |
| 3 | 18 | 19 | 15 | 4 | 11.5 | 0 |
| 4 | 18 | 22 | 25 | 0 | 11.0 | 3 |
| 5 | 18 | 15 | 15 | 0 | 7.5 | 0 |
| 6 | 18 | 18 | 20 | 0 | 9.0 | 2 |
| 7 | 18 | 16 | 15 | 1 | 8.5 | 0 |
| 8 | 18 | 19 | 20 | 0 | 9.5 | 1 |
| 9 | 18 | 17 | 20 | 0 | 8.5 | 3 |
| 10 | 18 | 15 | 15 | 0 | 7.5 | 0 |
| 合計 | | | 180 | | 94.5 | 9 |
| 平均 | | | 18 | | 9.45 | 0.9 |

表 13-7　二週訂購一次之模擬結果

| 週 (a) | 訂貨（收貨）(b) | 期初存貨 (c) | 模擬需求 (d) | 期末存貨 (e) | 平均存貨 ($f = [c+e] \div 2$) | 缺貨（欠撥）(g) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 36 | 36 | 15 | 21 | 28.5 | 0 |
| 2 | | 21 | 20 | 1 | 11.0 | 0 |
| 3 | 36 | 37 | 15 | 22 | 29.5 | 0 |
| 4 | | 22 | 25 | 0 | 11.0 | 3 |
| 5 | 36 | 33 | 15 | 18 | 25.5 | 0 |
| 6 | | 18 | 20 | 0 | 9.0 | 2 |
| 7 | 36 | 34 | 15 | 19 | 26.5 | 0 |
| 8 | | 19 | 20 | 0 | 9.5 | 1 |
| 9 | 36 | 35 | 20 | 15 | 25.0 | 0 |
| 10 | | 15 | 15 | 0 | 7.5 | 0 |
| 合計 | | | 180 | | 183.0 | 6 |
| 平均 | | | 18 | | 18.3 | 0.6 |

比較兩種訂購方式可知二週訂購一次較佳。

使用模擬的方法雖然可解決多個變數同時變動的問題，但是其仍有一些限制：(1)假設需求率變動（變數）是相互獨立的，(2)較適合長期的情況，對於短期問題其它方法比其更具經濟性，(3)不可能評估所有訂購決策，故不一定是最佳的解答，(4)如果估計之機率分配有誤，則所得之答案較不準確。因此如果模擬所得之結果不符實際情況，則應以專業人員之知識來判斷是否採用。

### 13-5-2-4　決策理論途徑

在需求變動的情況下除了前述的方法以外亦可利用**決策理論** (Decision Theory) 來求解，決策理論可考慮各種需求情況及其機率分配已知(risk) 或未知(uncertainty) 的情形，並可隨著對機率的調整而有"貝氏決策"等方法；本章僅說明簡單的決策理論方法用於存貨決策問題，期使利潤最大或成本最小，有興趣決策理論之讀者可參考相關專書。

**模式 11：風險情況下之存貨決策（只考慮單期）**

風險情況下是假設各種需求情況之機率已知，如何選擇適當的存貨決策以求利潤最大或存貨最小，茲以下例說明：已知需求率之機率分配如下：

| 需求量 | 機率 |
|---|---|
| 500 | 0.45 |
| 600 | 0.25 |
| 700 | 0.3 |

相關之資料為：①每單位採購成本 12 元，②銷售費用每單位 4 元，③持有成本每單位每期 1 元，④過期清倉價為每個 10 元，⑤當期售價每單位 25 元；欲求最佳之經濟訂購量，則用決策理論計算最大利潤之方式如下表 13-8 有三種情況分別計算其固定總利潤可得表 13-9 之利潤矩陣 (Profit Matrix)。表 13-8 說明若訂購量 $(Q)$ 與需求量 $(D)$ 相等則利潤為 $8 \cdot Q$，若 $Q < D$ 則利潤為 $8 \cdot Q$，$Q > D$ 則利潤為 $15D - 7Q$，計算各種情況下之利潤即得到表 13-9。但因其各期需求率為一機率分配，故要計算在不同訂購量下之期望利潤，如表 13-10。



表 13-8　各種需求情況之利潤

| | 當 $Q = D$ | | 當 $Q < D$ | | 當 $Q > D$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 正常營業收入 | (＋) | \$25Q | (＋) | \$25Q | (＋) | \$25D |
| 清倉收入 | (＋) | 0 | (＋) | 0 | (＋) | 10(Q－D) |
| 採購成本 | (－) | 12Q | (－) | 12Q | (－) | 12Q |
| 銷售費用 | (－) | 4Q | (－) | 4Q | (－) | 4Q |
| 持有成本 | (－) | 1Q | (－) | 1Q | (－) | 1Q |
| 利潤 | | \$ 8Q | | \$ 8Q | | \$15D－\$7Q |

表 13-9　利潤矩陣

| 訂購量 | 每期總利潤 | | |
|---|---|---|---|
| | 0.45 | 0.25 | 0.3 |
| $(Q)$ | $D = 500$ | $D = 600$ | $D = 700$ |
| 500 | \$4,000 | \$4,000 | \$4,000 |
| 600 | 3,300[a] | 4,800 | 4,800 |
| 700 | 2,600 | 4,100 | 5,600 |

註[a]：當 $Q = 600$，$D = 500$，則因為 $Q > D$，故
利潤 $= 15D - 7Q = 15(500) - 7(600) = 3,300$
表中其他數字皆按表 13-8 的情形計算而得。

表 13-10　不同訂購量之每期期望（平均）利潤

| 訂購量 | 每期平均利潤 |
|---|---|
| 500 | $\$4,000(= 4,000(.45) + 4,000(.25) + 4,000(.3))$ |
| 600 | $4,125(= 3,300(.45) + 4,800(.25) + 4,800(.3))$ |
| 700 | $3,875(= 2,600(.45) + 4,100(.25) + 5,600(.3))$ |

由表 13-10 可知以訂購 600 個之期望利潤最大為 4,125 元。

**模式 12：不確定情況下之存貨決策**

在不確定的情況下，決策理論可以依據不同的**決策準則** (Decision Criteria) 來選擇可行方案使其利潤最大（或成本最小）。一般常用的決策準則有下列幾種：①**無充分的理由** (Insufficient reason)，則令各種情況之機率相等又稱 Laplace 準則，②**利潤小中取大**(Maximum Minimum Profit)－又稱悲觀準則，③ **利潤大中取大**(Maximum Maximum Profit)－又稱樂觀準則，④**赫威茲準則**(Hurwicz Principle) 為一加權平均之算法。以下加以說明，數字例子同模式 11。

1. 令各種需求之機率相等（又稱 Laplace 準則）

   面臨不確知情況，可以主觀的設定各種需求情形發生之機率相等，且各種需求情況發生是互斥的，則計算期望利潤來決定存貨決策，如下表 13-11，應訂購 600 個，因其利潤最大。

表 13-11　需求情況之機率相等

| 訂購量 | 每期平均利潤 |
|---|---|
| 500 | (1/3)($4,000) + (1/3)($4,000) + (1/3)($4,000) = $4,000 |
| 600 | (1/3)($3,300) + (1/3)($4,800) + (1/3)($4,800) = $4,300 |
| 700 | (1/3)($2,600) + (1/3)($4,100) + (1/3)($5,600) = $4,100 |

minimax → cost

2. 利潤小中取大準則－悲觀（保守）準則　Maximin → profit

   這種決策法則是從利潤矩陣中（表 13-9），各種訂購方案中求得各方案中的最小利潤，再從中選取最大的，因為此種方式屬於悲觀（保守）的做法，故又稱悲觀準則 (Pessimistic Criterion)，由表 13-9 中可得表 13-12 之資料，為各種訂購量之最小利潤，從中選取最大，故應訂購 500 個。



表 13-12　利潤小中取大　maxmin

| 訂購量 | 最小利潤 | |
|---|---|---|
| 500 | $4,000 | ←最大 |
| 600 | 3,300 | |
| 700 | 2,600 | |

profit

3. 利潤大中取大準則－樂觀（冒險）準則　max max　minimum profit

   這種決策方式是從利潤矩陣中，各種訂購方案先求得可能發生的最大利潤為何，再比較何者利潤最大即選擇其訂購數量，因為屬於樂觀（或冒險）的做法，故又稱**樂觀準則**(Optimistic Criterion)。其計算結果如下表 13-13，選擇之方案為訂購 700 個。

表 13-13　利潤大中取大

| 訂購量 | 最大利潤 | |
|---|---|---|
| 500 | $4,000 | ←~~最大~~ |
| 600 | 4,800 | |
| 700 | 5,600 | ← |

4. 赫威茲準則

   由於最大利潤與最小利潤之發生為不確定的情況，赫威茲準則採加權平均的觀念來做決策使其不要太樂觀與太悲觀，但需先給予一主觀的機率值認為會發生最大利潤之機率為何（又稱為樂觀指標，以 $\alpha$ 表示）？而成為下列期望利潤之公式：

   最大利潤　　最小利潤

$$H_i = \alpha(\max p_{ij}) + (1-\alpha)(\min p_{ij}) \qquad (13\text{-}29)$$

$H_i$ = 第 $i$ 種訂購方案之期望利潤

$p_{ij}$ = 第 $i$ 種方案，第 $j$ 種需求情況下之利潤　(13-30)

（由利潤矩陣可得）

吾人欲從 $H_i$ 中選取最大的為訂購決策，計算如下：（假設 $\alpha$ =

$$-C_b[(Q+1)-Q-1]P(Q+1)$$

$$= C_e\sum_{D=0}^{Q}(Q-D)P(D) + C_e\sum_{D=0}^{Q}P(D)$$

$$+C_b\sum_{D=Q+1}^{\infty}(D-Q)P(D) - C_b\sum_{D=Q+1}^{\infty}P(D)$$

$$= TC(Q) + C_e\sum_{D=0}^{Q}P(D) - C_b\left[\sum_{D=0}^{\infty}P(D) - \sum_{D=0}^{Q}P(D)\right]$$

$$= TC(Q) + C_e\sum_{D=0}^{Q}P(D) - C_b\left[1 - \sum_{D=0}^{Q}P(D)\right]$$

$$= TC(Q) + (C_e+C_b)\sum_{D=0}^{Q}P(D) - C_b \qquad (13\text{-}26)$$

同理可得

$$TC(Q-1) = TC(Q) - (C_e+C_b)\sum_{D=0}^{Q-1}P(D) + C_b \qquad (13\text{-}27)$$

然而，$TC(Q) > TC(Q+1)$ 與 $TC(Q-1) > TC(Q)$ 同時成立才為最小成本，故 $TC(Q+1) - TC(Q) > 0$，且 $TC(Q-1) - TC(Q) > 0$，以 13-26 式與 13-27 式減去 13-25 式均大於零，則可得：

$$TC(Q+1) - TC(Q) > 0 \Rightarrow (C_e+C_b)\sum_{D=0}^{Q}P(D) - C_b > 0$$

c.d.f

$$\sum_{D=0}^{Q}P(D) > \frac{C_b}{C_e+C_b} \Rightarrow P(D \le Q) > \frac{C_b}{C_e+C_b}$$

同理，$TC(Q-1) - TC(Q) > 0 \Rightarrow P(D \le Q-1) < \dfrac{C_b}{C_e+C_b}$ 故可知：

$$P(D \le Q-1) < \frac{C_b}{C_e+C_b} < P(D \le Q) \qquad (13\text{-}28)$$



亦即最低期望總成本的訂購量 $Q$ 會滿足 13-28 式，因此只要知道成本資料與需求量的機率分配，即可求出應訂購之數量，而利用 13-28 式所求之數值即為一適當的服務水準機率值。

**例 13-11**

已知某花童賣玫瑰花，根據以前的需求量（打）記錄得知每日的玫瑰花需求量為**波氏分配**(Poisson distribution)，平均一天為 4 打，每打利潤為 3 元，若當天沒有賣出去則損失為每打 2 元，試求最小總期望成本的訂購量與服務水準。

**解**：由 13-23 式可得：

$$\frac{C_b}{C_b+C_e} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

由此表示服務水準在 0.6 可得最小成本，查波氏分配（見附錄）可得知下列需求狀況（平均數為 4）：

| 需求量（打／天） | 累積機率（服務水準） |
|---|---|
| 0 | 0.018 |
| 1 | 0.092 |
| 2 | 0.238 |
| 3 | 0.433 |
| 4 | 0.629 → 最佳服務水準 |
| 5 | 0.785 |
| ⋮ | |

即最佳訂購量為 4 打。（如果用 13-28 式計算之服務水準為 0.629 則訂 4 打與 5 打之期望成本相同）

### 13-5-2-3　模擬法

隨著電腦科技的進步，對於複雜的存貨問題，吾人可以用**模擬** (simulation) 的方法來求得近似最佳解，使用模擬方式可以由電腦中產生

斤／天，庫存量在訂購時點為 71 公斤，$L=2$ 天，$OI=7$ 天，試求應訂購數量為何？

**解**：由公 13-24 式可得：

$$
\begin{aligned}
Q &= \bar{d}(OI+L)+z\sigma_d\sqrt{OI+L}-A \\
&= 30(7+2)+2.33(3)\sqrt{7+2}-71 \\
&= 220\text{（公斤）}
\end{aligned}
$$

### 13-5-2-2　模式 10：報童模式（單期模式）單一期間模式

本模式只考慮單期(single-period)的情況，即當購買太多的數量若在一定期間之內未使用（或賣出）即會使存貨損壞（或失效）而只剩殘值，但是若購買太少則又可能喪失銷售的機會而產生缺貨成本，此種情形報童時常面臨，故又稱之**報童模式**(News boy Model)，除了報童以外，如超級市場、花店、麵包店等容易腐壞的存貨或是單期給特殊設備使用的備用零件亦可用此模式訂定最低成本的訂購數量。

在分析報童模式時考慮的成本為缺貨成本和持有過多存貨的成本二種，一般而言缺貨成本多用每單位利潤（售價減成本）來估計，持有過多成本則以購買單價減去每單位殘值而得（如果為了處理過多存貨尚需支付處理成本，則殘值甚至可以為負值）。本模式假定沒有數量折扣及已知需求變動的機率分配。

假設每單位缺貨成本為 $C_b$，持有過多存貨成本為 $C_e$，單期需求量為 $D$，訂購數量為 $Q$，則其有二種情況之成本：

當 $D \leqq Q$ 時，總持有過多成本 $=(Q-D)C_e$

$D>Q$ 時，總缺貨成本 $=(D-Q)C_b$

欲求總成本最小，即為

$$min(Q-D)C_e+(D-Q)C_b$$

但因為 $D$ 為變動其機率為 $P(D)$，本例以間斷機率分配求算（亦可以視情況以連續分配表示需求變化情況），則其期望總成本為：

$$TC(Q)=C_e\sum_{D=0}^{Q}(Q-D)P(D)+C_b\sum_{D=Q+1}^{\infty}(D-Q)P(D) \quad (13\text{-}25)$$

欲求 $TC(Q)$ 最小之訂購量 $Q$ 可以用差分來計算，若 $Q$ 可使 $TC(Q)$ 最小則應滿足下列的條件：

$$TC(Q+1)>TC(Q)\text{，且 } TC(Q-1)>TC(Q)$$

其關係如圖 13-23 所示。

marginal analysis

邊際分析

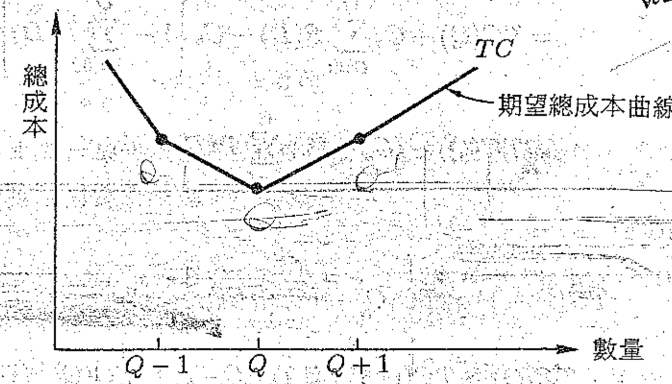



圖 13-23　期望總成本線

因為　TC(Q) ⇒ Q to Q+1 代入

$$
\begin{aligned}
TC(Q+1) &= C_e\sum_{D=0}^{Q+1}(Q+1-D)P(D)+C_b\sum_{D=Q+2}^{\infty}(D-Q-1)P(D) \\
&= C_e\sum_{D=0}^{Q}(Q+1-D)P(D) \\
&\quad +C_e[(Q+1)-(Q+1)]P(Q+1) \\
&\quad C_b\sum_{D=Q+1}^{\infty}(D-Q-1)P(D)
\end{aligned}
$$