CH17 馬可夫鏈

17.1 馬可夫鏈定義

令 X_t 為一隨机变数，其描述離散時间点 $t=1,2,\ldots$ 時系統狀態特徵。隨机变数所組成的集合即形成一隨机過程 (stochastic process) 其狀態數目可能是有限或無限的。

Example 17.1-1 机器維修

$$X_t = \begin{cases} 0, & \text{if the condition is poor} \\ 1, & \text{if the condition is fair} \\ 2, & \text{if the condition is good} \end{cases} \quad t=1,2,\ldots$$

机器每月預防維修之情況可分為差、普通、好，在 t 月時，上述情形之隨机过程可以上述式子代表。隨机变数 X_t 是有限的，因為其代表三种狀態：poor(0), fair(1), and good(2).

Example 17.1-2 (Job Shop)

工作到達現場以每小時 5 件工作之到達率，到達過程形成一布瓦松分配。其理論允許任何数目之工作在時间区间 $(0,t)$ 到達現場。這無限狀態过程描述到達工作数目是

$X_t = 0,1,2,\ldots,\ t>0.$

馬可夫過程：一隨机过程其未來狀態僅与目前狀態有関，以数学式表示

$$P\{X_{t_n}=x_n \mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1}, \ldots X_{t_0}=x_0\} = P\{X_{t_n}=x_n \mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$。

在一馬可夫過程，有 n 個互斥狀態，在特定時間点 $t=0,1,2,\ldots$ 其机率定義如下：

$$p_{ij} = P\{X_t=j \mid X_{t-1}=i\},\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n,\ t=0,1,\ldots T$$

這是由狀態 i 移至狀態 j（時間 t）之一步轉移机率（one-step transition probability）。

其中 $\sum_j p_{ij} = 1,\quad i=1,2,\ldots,n$

$$p_{ij} \geq 0,\ (i,j)=1,2,\ldots,n$$

矩陣是一方便的方法彙整一步轉移机率

$$P=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

矩陣 P 定義一馬可夫鏈。有一性質所有轉移机率 p_{ij} 是穩定和独立於時間。

$$P\{X_{t+1}=j \mid X_t=i\} = P\{X_1=j \mid X_0=i\}$$

Example 17.1-3 園丁問題

每一年在園藝季節開始，一位園丁應用化學試驗來檢查土壤的情況，依據試驗結果，新季節花園之生產力會有三種狀態：(1) 好 (2) 普通 (3) 差。

過去數年，該園丁觀察當年之生產力僅依上一年之土壤情況而定，在一年周期之期間由一生產力狀態至另一生產力狀態之轉移機率可以馬可夫鏈表示：

$$P = \begin{array}{c} \text{本年系統} \\ \text{狀態} \end{array} \left\{ \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \text{明年系統狀態} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

在 P 中的轉移機率指出當年的生產力不會比上一年的生產力更好，例如本年土壤情況是好（狀態 1）則次年的生產力有 0.2 機率可能保持好，也有 0.5 的機率成為普通（狀態 2）與 0.3 的機率變成差（狀態 3）。

該園丁可藉由其他措施改變轉移機率 P，一般而言，施用肥料可提昇土壤情況，此將產生下列轉移矩陣 P_1：

$$P_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} \end{array}$$

17.2 絕对与 n 步轉移机率

給定一馬可夫鏈之轉移矩陣 P 与起始机率向量 $a^{(0)}=\{a_j^{(0)}, j=1,2,\ldots,n\}$.

經由 n 次轉移後,絕对机率

$$a^{(n)}=\{a_j^{(n)}, j=1,2,\ldots,n\}.$$

可以計算如下:

$$a^{(1)}=a^{(0)}P$$
$$a^{(2)}=a^{(1)}P=a^{(0)}PP=a^{(0)}P^2$$
$$a^{(3)}=a^{(2)}P=a^{(0)}P^2P=a^{(0)}P^3$$
$$\vdots$$
$$a^{(n)}=a^{(0)}P^n$$

P^n 是 n 步轉移矩陣。由計算,我們得知.

$$P^n=P^{n-1}P$$

且

$$P^n=P^{n-m}P^m, \quad 0<m<n$$

這就是 Chapman-Kolomogorov equations.

Example 17.2-1

園丁問題使用肥料之轉移矩陣

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \end{array}$$

土壤之起始條件為好,亦即 $a^{(0)}=(1,0,0)$

決定 1, 8, 16 個園藝季節後,系統三種狀態之絕对机率.

$$P^{8} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}^{8} = \begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix}$$

$$P^{16} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}^{16} = \begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix}$$

於是絕对机率計算如下

$$a^{(1)} = (1,0,0)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} = (0.3,\ 0.6,\ 0.1)$$

$$a^{(8)} = (1,0,0)\begin{pmatrix} .101753 & .525514 & .372733 \\ .101702 & .525435 & .372863 \\ .101669 & .525384 & .372863 \end{pmatrix} = (.101753,\ .525514,\ .372733)$$

$$a^{(16)} = (1,0,0)\begin{pmatrix} .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \\ .101659 & .52454 & .372881 \end{pmatrix} = (.101659,\ .52454,\ .372881)$$

P^8 的列与 $a^{(8)}$ 絕对机率幾乎相同。這种結果在 P^{16} 更為明顯。它示範當轉移次数增加，絕对机率变成与起始 $a^{(0)}$ 独立。這种机率是 steady-state probabilities 穩定狀態机率。

17.3 馬可夫鏈中之狀態分類

馬可夫鏈之狀態，可以基於轉移机率加以分類

1. 若 $P_{jj}=1$，則狀態 j 是 absorbing 吸收狀態亦即它會回到自己在一次轉移。
2. 若狀態 j 是 transient 轉移狀態，亦即它可以到達其他狀態，但不能由其他狀態回到狀態 j。以数學表示

   $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)}=0$, for all i.
3. 若狀態 j 是 recurrent 再生狀態，如果狀態 j 會再次造訪的机率是 1，亦即狀態 j 不是轉移狀態。

4. 狀態 j 是 periodic 期數的，其中 $t > 1$

狀態 j 會回到 j 只在 $t, 2t, 3t, \cdots$ 步轉移.

亦即 t 不為 $t, 2t, 3t, \ldots$ 時 $p_{jj}^{(n)} = 0$.

基於上述定義，一有限馬可鏈不可能包含所有轉移狀態。因為轉移特性會進入其他陷阱狀態，且從未再次造訪轉移狀態。陷阱狀態也未必需要是一吸收狀態。

例如，

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}$$

狀態 1 與 2 是轉移狀態，因為一旦進入陷阱狀態 3 與 4，就不可能再回到狀態 1 與 2。狀態 3 與 4 扮演一种吸收狀態的角色，並構成一 closed set 封閉集合。

依據定義，封閉集合必需 communicate 相通。相通代表經由多次轉移，可由其他狀態至其他狀態，i.e. $p_{ij}^{(n)} > 0$ for $i \neq j$ and $n \geq 1$。

一個封閉的馬可夫鏈稱為 ergodic 遍歷的，如果所有狀態是再生狀態且 aperiodic (not periodic) 無期數的。則經過 n 次轉移，絕对机率 $a^{(n)}=a^{(0)}P^n$ 總是收斂至一穩定狀態分配，亦即與起始机率 $a^{(0)}$ 独立。

Example 17.3-1 (Absorbing and Transient States)

考慮没有施肥之園丁馬可夫鏈、

$$P=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

狀態 1 與 2 是轉移的，因為一旦到達狀態 3 就不可能回到狀態 1 與 2。狀態 3 是吸收狀態，因為 $p_{33}=1$. 當 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$，例如，

$$P^{100}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

結果顯示，長期而言，再進入狀態 1 與 2 之机率為零。在吸收狀態 3 是確定的.

Example 17.3-2 (Periodic States)

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{pmatrix} \quad P^2=\begin{pmatrix} 0.24 & 0.76 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.76 & 0.24 \end{pmatrix} \quad P^3=\begin{pmatrix} 0 & 0.904 & 0.096 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.144 & 0.856 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P^4=\begin{pmatrix} 0.0567 & 0.9424 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9424 & 0.0576 \end{pmatrix} \quad P^5=\begin{pmatrix} 0 & 0.97696 & 0.02304 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.03456 & 0.96544 & 0 \end{pmatrix}$$

經由觀察 p_{11} 和 p_{33}，當 n 為偶數，机率為正的，其他為零，代表狀態 1 與 3 有期數為 2 $(t=2)$。

17.4 STEADY-STATE PROBABILTIES AND MEAN RETURN TIMES OF ERGODIC CHAINS

在一遍歷的馬可夫鏈，穩定狀態機率定義如下

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} a_j^{(n)}, \quad j=0,1,2,\ldots$$

這些機率與 $\{a_j^{(0)}\}$ 獨立，可由下列方程式決定

$$\pi = \pi P$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

$\pi = \pi P$ 描述 π 維持不變，即使再一次轉移。由於這理由，其代表穩定狀態分配。

一穩定狀態機率之副產品是決定系統回到狀態 j 的期望轉移次數與第一次。分別代表 mean first return time 平均第一次返回時間與 mean recurrence time 平均再生狀態時間。在一 n-state 馬可夫鏈可以計算如下：

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}, \quad j=1,2,\ldots,n$$

Example 17.4-1

為決定園丁有肥料之穩定狀態机率分配

$$(\pi_1\ \pi_2\ \pi_3) = (\pi_1\ \pi_2\ \pi_3)\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 = 0.3\pi_1 + 0.1\pi_2 + 0.05\pi_3$$
$$\pi_2 = 0.6\pi_1 + 0.6\pi_2 + 0.4\pi_3$$
$$\pi_3 = 0.1\pi_1 + 0.3\pi_2 + 0.55\pi_3$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

其解 $\pi_1 = 0.1017$, $\pi_2 = 0.5254$, $\pi_3 = 0.3729$ 代表長期而言，有 10% 机率土壤條件為好。52% 机率土壤條件是普通，37% 机率土壤條件是差。

平均第一次返回時間可計算如下：

$$u_{11} = \frac{1}{0.1017} = 9.83 \quad u_{22} = \frac{1}{0.5254} = 1.9 \quad u_{33} = \frac{1}{0.3729} = 2.68$$

平均而言，園丁要花 10 次轉移季節使土壤回到好的狀態，2次回到普通狀態，3次回到差的狀態。此項結果指出使用肥料之建議对於土壤條件是前景不太好的。一更積極之計劃可改進

此情形。例如考慮下列轉移矩陣

$$P = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.6 & 0.05 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.25 & 0.4 & 0.35 \end{pmatrix}$$

其轉移至好的狀態机率，較前一矩陣高。在這一矩陣 $\pi_1 = 0.31$，$\pi_2 = 0.58$，$\pi_3 = 0.11$，

$\mu_{11} = 3.2$ $\mu_{22} = 1.7$ $\mu_{33} = 8.9$，較前一情況為佳。

Example 17.4-2 (Cost Model)

考慮園丁問題有肥料 (Example 17.1-3)，園丁需要二袋肥料如果土壤是好。土壤是普通，量要增 25%，土壤是差，量要增加 60%。肥料一袋成本為 \$50。園丁估計如不用肥料其年收益為 \$250，如果使用肥料年收益為 \$420，試問使用肥料是否經濟？

使用在 Example 17.4-1 的穩定狀態机率。

$$\text{肥料年期望成本} = 2 \times \$50 \times \pi_1 + (1.25 \times 2) \times \$50 \times \pi_2 + (1.6 \times 2) \times \$50 \times \pi_3$$

$$= 100 \times 0.1017 + 125 \times 0.5254 + 160 \times 0.3729$$

$$= \$135.51$$

兩方案間之收益差異為 $\$420 - \$250 = \$170$

所以推薦使用肥料。

17.5 FIRST PASSAGE TIME 第一次通過時間

在 17.4 我們使用穩定狀態機率計算 μ_{jj} 平均第一次返回時間. 在這節我們關心 mean first passge time μ_{ij} 平均第一次通過時間. 定義為由狀態 i 至狀態 j 之期望轉移次數。

計算源於決定至少一次由狀態 i 至狀態 j 之機率, 定義如 $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$, 其中 $f_{ij}^{(n)}$ 是在 n 次轉移中, 由狀態 i 至狀態 j 第一次通過之機率。 $f_{ij}^{(n)}$ 可以由遞迴形式決定

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{ij}^{(n-k)}, \quad n=1,2,\ldots$$

轉移矩陣 $P = \| p_{ij} \|$ 假設有 m 個狀態.

1. 如果 $f_{ij} < 1$. 它是不確定系統會由狀態 i 至狀態 j 且 $\mu_{ij} = \infty$

2. 如果 $f_{ij} = 1$. 馬可夫鏈是遍歷的, 且平均第一次通過時間由狀態 i 至狀態 j, 計算如

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

在一 m 狀態轉移矩陣，比較簡單的方法決定所有狀態之平均第一次通過時間，可以使用矩陣基礎之公式

$$\| u_{ij} \| = (I - N_j)^{-1}\mathbf{1} \quad , j \neq i$$

其中

$I = (m-1)$ 單位矩陣

$N_j =$ 轉移矩陣 P 移除狀態 j 之第 j 行與 j 列。

$\mathbf{1} = (m-1)$ 行向量，每一元素均為 1.

矩陣運算 $(I-N_j)^{-1}\mathbf{1}$ 加總 $(I-N_j)^{-1}$ 所有行

Example 17.5-1

再次考慮園丁問題使用肥料

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{pmatrix}$$

考慮由狀態 2 與 3 到達狀態 1，於是 $j=1$

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.55 \end{pmatrix} \quad (I - N_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.3 \\ -0.4 & 0.45 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7.5 & 5 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix}$$

於是

$$\begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.5 & 5 \\ 6.67 & 6.67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.5 \\ 13.34 \end{pmatrix}$$

於是平均而言，花 12.5 季節由土壤情況普通至好，花 13.34 季節，土壤情況由差至好。同理可計算出 u_{12} 和 u_{32}，u_{13} 與 u_{23}.

17.6 ANALYSIS OF ABSORBING STATES

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

前述園丁未使用肥料轉移矩陣，狀態1與2是轉移的，狀態3是吸收的。馬可夫鏈有可能包含多於1個吸收狀態。在這一類的馬可夫鏈，我們有興趣決定到達吸收狀態的机率或到達吸收狀態之期望轉移次數。

使用矩陣可以便利於分析馬可夫鏈的吸收狀態。

$$P = \left(\begin{array}{c|c} N & A \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

矩陣安排需要吸收狀態佔據矩陣的東南角。以下列矩陣為例

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P=\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 & 0.1 \\ 3 & 0.5 & 0 & 0.3 & 0.2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

於是 $N=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.5 & 0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.2\end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

給定 A，N 与 I，可證得下面結果

1. 由開始狀態 i 在狀態 j 期望時間

$$=(I-N)^{-1} \text{ 中元素} (i,j)$$

2. 吸收狀態的期望時間

$$=(I-N)^{-1}\mathbf{1}$$

3. 吸收的机率 $=(I-N)^{-1}A$

Example 17.6-1

一產品依順序在机器 I，II 上處理。檢查發生於任一机器之後。有 5% 机率在檢查前會壞掉，檢查後也有 3% 机率会壞掉。有 7% 机率會回到相同机器重新生產。

(a) 一零件開始於机器 I，決定平均拜訪每一狀態之數目。

(b) 一批 1000 單位始於机器 I，決定完成良品平均數目。

生產過程有 6 個狀態：在机器 I 開始 (s1)，在机器 I 後檢查 (i1)，在机器 II 開始 (s2)，在机器 II 後檢查 (i2)，在檢查 I 或 II 後壞掉 (J)，產品良好經过机器 I 與 II 並通過檢查 (G)

$$
P = \begin{array}{c} \\ s1 \\ i1 \\ s2 \\ i2 \\ J \\ G \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} s1 & i1 & s2 & i2 & J & G \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccc|cc}
0 & 0.95 & 0 & 0 & 0.05 & 0 \\
0.7 & 0 & 0.9 & 0 & 0.03 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.95 & 0.05 & 0 \\
0 & 0 & 0.07 & 0 & 0.03 & 0.9 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
N = \begin{array}{c} \\ s1 \\ i1 \\ s2 \\ i2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} s1 & i1 & s2 & i2 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0.95 & 0 & 0 \\
0.7 & 0 & 0.9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.95 \\
0 & 0 & 0.07 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
A = \begin{array}{c}
\begin{array}{cc} J & G \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0.05 & 0 \\
0.03 & 0 \\
0.05 & 0 \\
0.03 & 0.9
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
(I-N)^{-1} = \begin{pmatrix}
1 & -0.95 & 0 & 0 \\
-0.07 & 1 & -0.9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.95 \\
0 & 0 & -0.07 & 1
\end{pmatrix}^{-1}
= \begin{pmatrix}
1.07 & 1.02 & 0.98 & 0.93 \\
0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\
0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\
0 & 0 & 0.07 & 1.07
\end{pmatrix}
$$

$$
(I-N)^{-1}A = \begin{pmatrix}
1.07 & 1.02 & 0.98 & 0.93 \\
0.07 & 1.07 & 1.03 & 0.98 \\
0 & 0 & 1.07 & 1.02 \\
0 & 0 & 1.07 & 1.07
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0.05 & 0 \\
0.03 & 0 \\
0.05 & 0 \\
0.03 & 0.9
\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix}
0.16 & 0.84 \\
0.12 & 0.88 \\
0.08 & 0.92 \\
0.04 & 0.96
\end{pmatrix}
$$

$(I-N)^{-1}$的最上列顯示，平均而言机器I拜訪1.07次，檢查机器I拜訪1.02次，机器II拜訪0.98次，檢查机器II拜訪0.93次。前兩者拜訪次數大於1之原因是因為重新生產與重新檢查。另一方面，对应於机器II的數值小於机器I是因為部分零件在到達机器II之前就壞了。

在完美情況下（沒有零件壞掉或重做）$(I-N)^{-1}$会顯示正好每一站拜訪一次。停留在各站的時間會不同。例如在机器I与II之處理時間分別為20分鐘与30分鐘。其对应之檢查時間分別為5分鐘与7分鐘。則一零件開始於机器I將会被處理（壞掉或完成）in

$1.07 \times 20 + 1.02 \times 5 + 0.98 \times 30 + 0.93 \times 7 = 62.41$分鐘

為決定一開始 1000 件零件之完成數目，
我們可以由 $(I-N)^{-1}A$ 的最上一列。

一零件壞掉的机率為 0.16

一零件完成的机率為 0.84

代表 $1000 \times 0.84 = 840$ 件會完成。