

Chapter 5 Transportation Model and Its variants

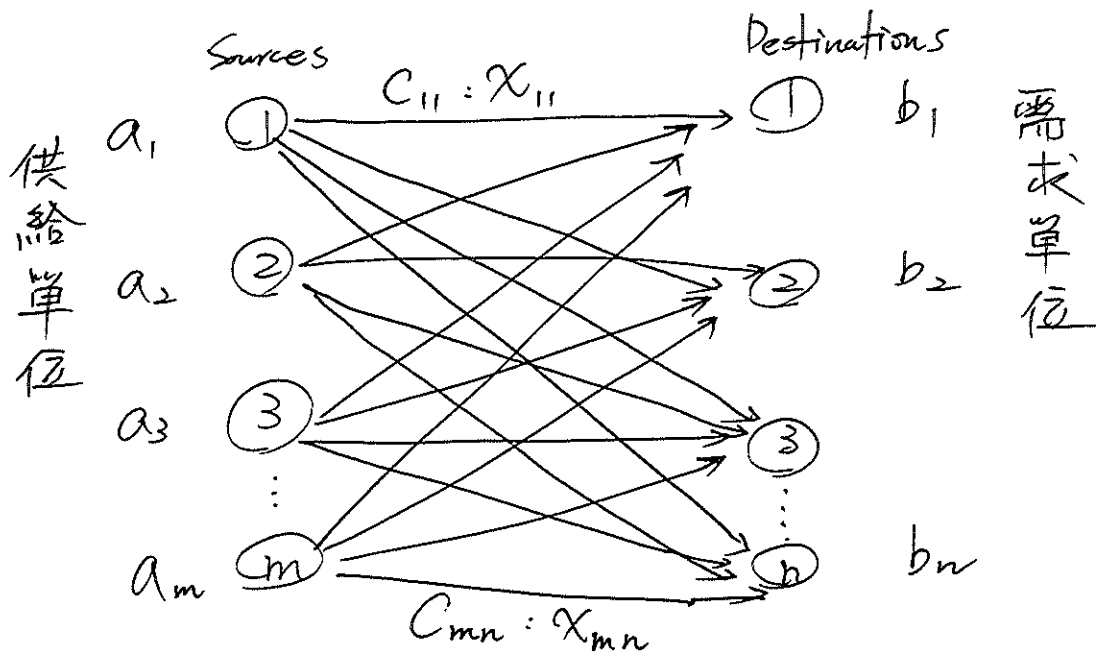


圖 5.1 以節點與弧代表運輸模式

5.1 運輸模式之定義

8¢ per mile

	Denver	Miami	Supply
Los Angeles	X_{11} 80	X_{12} 215	1000
Detroit	X_{21} 100	X_{22} 108	1500
New Orleans	X_{31} 102	X_{32} 68	1200
Demand	2300	1400	

	Denver	Miami
Los Angeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
New Orleans	1275	850

Table 5.2 每車之運輸成本
5.3 MG 運輸模式

Table 5.1 Mileage Chart

$$\text{Min } Z = 80 X_{11} + 215 X_{12} + 100 X_{21} + 108 X_{22} + 102 X_{31} + 68 X_{32}$$

st.

$$X_{11} + X_{12} = 1000$$

$$X_{21} + X_{22} = 1500$$

$$X_{31} + X_{32} = 1200$$

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 2300$$

$$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 1400$$

$$X_{ij} \geq 0, i=1,2,3, j=1,2$$

使用 TORA 最佳解

總成本 313,200

$$= 80 \times 1000 + 100 \times 1300 + 108 \times 200 + 68 \times 1200$$

	Denver	Miami	
LA	80	215	1000
Detroit	100	108	1500
New Orleans	102	68	1200
	2300	1400	

Example 5.1-2 均衡運輸模式

表 5.4 MG Model with Dummy Plant

表 5.5 MG Model with Dummy Destination

	Supply	
LA	1000	
Detroit	1300	← 假設
New Orleans	1200	
Dummy Plant	200	
	2300	1400

	Denver	Miami	Dummy	
LA	80	215	0	1000
Detroit	100	108	10	1500
New Orleans	102	68	10	1200
	1900	1400	400	

↑
假設

5.2 非傳統運輸模式

Example 5.2-1 (生產-存貨控制)

Borwils 估計 3月、4月、5月、6月之需求分別為 100, 200, 180, 與 300, 該公司使用 part-time worker 所以每月產能是變動估計 3~6月分別可生產 50, 180, 280, 270 單位產品, 當月需求可由三種方式滿足 ① 當月生產

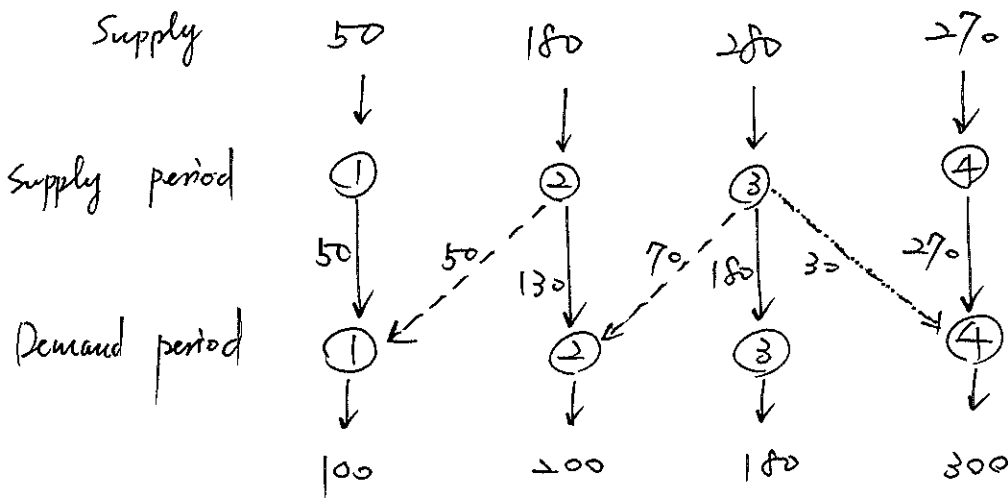
② 前月庫存 ③ 下月生產再補足 (back ordering)

生產每單位產品之成本 \$40, 持有一單位產品一個月之成本為 \$0.5, 每單位產品每月之 back order 成本為 \$2.

	1	2	3	4	Capacity
1	40	40.5	41	41.5	50
2	42	40	40.5	41	180
3	44	42	40	40.5	280
4	46	44	42	40	270
Demand	100	200	180	300	

Optimal Solution # 31,455

dash 代表 backordering
dot 代表 生產滯呆



5.3 THE TRANSPORTATION ALGORITHM

Summary of the Transportation Algorithm

Step 1. 決定 - 基本可行解. Go to step 2.

Step 2. 使用 simplex method 中的 optimality condition 決定
進入變數 (由 nonbasic variable 中), 如果
optimality condition 滿足, 則停止, 否則 Go to step 3.

Step 3. 使用 Simplex method 中的 optimality condition 決定
離去變數 (由 basic variable 中), 並找出
新的基本解, 回到 step 2.

5.3.1 決定開始的基本可行解.

starting solution has $m+n-1$ basic variables.

m : 為 source n 為 destination. 因為 Transportation model 是均衡 所以有一 Equation 是多餘.

決定開始基本解之方法有 1. Northwest-corner method 西北角法 2. Least-cost method 最小成本法 3. Vogel approximation method 佛哥近似法.

表 5.17 西北角法

	1	2	3	4	Supply
1	5	10			15
2		5	15	5	25
3				10	10
Demand	5	15	15	15	

表 5.18 最小成本法

	1	2	3	4	Supply
1	10	15	20	11	15
2	12	17	9	20	25
3	14	14	16	18	10
Demand	5	15	15	15	

- (1) 選找最小成本.
- (2) 同時滿足 CROSS OUT ROW OR COLUMN.

Vogel's approximation

1. 計算每一行、每一行之 penalty (次小成本 - 最小成本)
2. 由 penalty 中選出最大之 row or column.
3. 在該 row or column 中選成本最小之 cell. 儘量指派量.
4. 重覆 steps 1 - 3.

表 5.19 Row and Column Penalties in VAM

	1	2	3	4	Row penalty
1	10	2	20	0	15 - 10 - 2 = 8 (9) 9
2	12	7	9	10	25 - 10 - 9 - 7 = 2 2 (11)
3	4	14	16	5	10 - 14 - 4 = 10 (10) 2 2
	5	15	15	15	
Column Penalty	10 - 4 = 6	7 - 2 = 5	16 - 9 = 7	18 - 11 = 7	
	-	5	7	7	
	-	-	7	7	

5.3.2 Iterative Computations of the Transportation Algorithm

使用上述方法決定起初解，再使用下列方法決定最佳解。

step 1. 使用 Simplex method 中的 optimality condition 決定進入變數 (由 nonbasic variable 中)，如果 optimality condition 滿足，則停止，否則 Go to step 2.

step 2. 決定離去變數使用 simplex feasibility condition. 改變 the basis, 回到 step 1.

決定進入變數 (由 nonbasic variables 中) 藉由計算 z-row 非基本變數係數，使用 method of multipliers.

列 i 乘數 行 j 乘數

$$u_i + v_j = C_{ij} \text{ for each basic } X_{ij}$$

	$V_1=10$ 1	$V_2=2$ 2	$V_3=4$ 3	$V_4=15$ 4	
$u_1=0$ 1	5	10	-16	4	15
$u_2=5$ 2	12	5	15	5	25
$u_3=3$ 3	3	4	14	10	10
	5	15	15	15	

$$u_1 + V_1 = 10 \quad u_1 + V_2 = 2 \quad u_2 + V_2 = 7 \quad u_2 + V_3 = 9$$

$$u_2 + V_4 = 20 \quad u_3 + V_4 = 18$$

令 $u_1=0$ 求解出 $V_1, V_2, u_2, V_3, V_4, u_3$

使用 $u_i + V_j - C_{ij}$ for each nonbasic x_{ij}

最小內題，選正的字最大。

決定 - closed loop 由每一行每一列選擇 - 基本變數。

-					
	$5-\theta$	$10+\theta$			15
		$5-\theta$		$5+\theta$	25
+	θ			$10-\theta$	10
	5	15	15	15	

$$\min \{10, 5, 5\} = 5 \quad \therefore \theta = 5 \text{ 為最大}$$

可增加的量

$V_1=1 \quad V_2=2 \quad V_3=4 \quad V_4=15$

	$\begin{matrix} 10 \\ -9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 15-\theta \\ 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 \\ -16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ 4 \\ 20 \end{matrix}$	15
$u_1=0$					
$u_2=5$	$\begin{matrix} 12 \\ -6 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 0+\theta \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ -15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 \\ -10-\theta \end{matrix}$	25
$u_3=3$	$\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ -9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16 \\ -9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 18 \\ 5 \end{matrix}$	10
	5	15	15	15	

$V_1=-3 \quad V_2=2 \quad V_3=4 \quad V_4=11$

	$\begin{matrix} 10 \\ -13 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 \\ -16 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 11 \\ 10 \end{matrix}$	15
$u_1=0$					
$u_2=5$	$\begin{matrix} 12 \\ -10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 7 \\ 10 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9 \\ 15 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 20 \\ -4 \end{matrix}$	25
$u_3=7$	$\begin{matrix} 4 \\ 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 14 \\ -5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 16 \\ -5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 18 \\ 5 \end{matrix}$	10
	5	15	15	15	

optimal cost = 435

5.4 THE ASSIGNMENT MODEL

		Jobs				
		1	2	...	n	
Worker	1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	1
	2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	1

	n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}	1
		1	1	...	1	

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if worker } i \text{ is assigned to job } j \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n X_{ij} = 1, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$X_{ij} = 0 \text{ or } 1$$

The Hungarian method:

step 1. 找出每列最小成本，將每列元素減去最小成本，構成新矩陣。

step 2. 以 step 1 之矩陣，找出每行最小成本，將每行元素減去最小成本。

step 2a. 如果沒有可行指派（每行、每列均有 0）

(i) 以最少的水平、垂直綫劃掉所有的 0。

(ii) 由未被劃掉的元素中，選取最小元素，將所有未被劃掉的元素減去最小元素，在二綫交叉處，加上最小元素。

step 3. 將每一行、每一列，分配一丁零。

	Mow	Paint	Wash
John	15	10	9
Karen	9	15	10
Terri	10	12	8

John	6	1	0
Karen	0	6	1
Terri	2	4	0

John	6	0	0
Karen	0	5	1
Terri	2	3	0

对应原成本矩阵

John	15	10	9
Karen	9	15	10
Terri	10	12	8

$$\text{Total Cost} = 27$$

Child

	Chore			
	1	2	3	4
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	8	7	8	5

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

0	2	1	1
3	0	0	2
0	0	3	2
4	2	0	0

0	2	1	1
3	0	0	2
0	0	3	2
4	2	0	0

Total Cost = 21

对应原成本
总序

1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5