Primal

$$\text{Max } z = \underset{1\times n}{C}\underset{n\times 1}{X}$$
st
$$\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{X} \le \underset{m\times 1}{b}$$
$$\underset{n\times 1}{X} \ge 0$$

Dual

$$\text{Min } w = \underset{1\times m}{y}\underset{m\times 1}{b}$$
$$\underset{1\times m}{y}\underset{m\times n}{A} \ge \underset{1\times n}{C}$$
$$\underset{1\times m}{y} \ge 0$$

Weak Duality Property 弱对偶特性

令 X_0 与 y_0 為 Primal 与 Dual Problem 的可行解，則 $AX_0 \le b$ 且 $y_0A \ge C$，為能知道 X_0 与 y_0 之関係，

將 $AX_0 \le b$ 由左側乘上 y_0 $\Rightarrow$ $y_0AX_0 \le y_0b$

將 $y_0A \ge C$ 由右側乘上 X_0 $\Rightarrow$ $y_0AX_0 \ge CX_0$

綜合上述兩式，得知 $y_0b \ge CX_0$，其中 CX_0 為最大化問題於可行解 X_0 的 Z 值，而 y_0b 為最小化問題於可行解 y_0 的 w 值。

Strong Duality Property 強對偶特性

基於上述弱对偶特性 $y_0b \ge CX_0$，令 X^* 為最大化問題之最佳解，且 y^* 為最小化問題之最佳解；則 X^* 為最大化問題具有最大 Z 值之可行解，且 y^* 為最小化問題具有最小 w 值之可行解。因此當原始問題与对偶問題之最佳解均存在時，$CX^* = y^*b$。

（應用：當 LP 具有較多限制式時，可將其轉換成其对偶問題求解，以提升求解效率）

互補差額定理（Complementary Slackness Theorem）

Primal	Dual
Max $z = cx$	Min $w = yb$
st $Ax + u = b$	$yA - v = c$
$x \geq 0,\ u \geq 0$	$y \geq 0,\ v \geq 0$

x^* 與 y^* 分別為 Primal 與 Dual 的最佳解，若且唯若

$$v_j^* x_j^* = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, n$$
$$y_i^* u_i^* = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

其中 u 是 slack vector，v 是 surplus vector，x^* 與 y^* 分別是兩問題之最佳解，代入分別之限制式可得

$Ax^* + u^* = b$
$y^*A - v^* = c$
對這兩式分別乘上 y^*、x^* 可得
$y^*Ax^* + y^*u^* = y^*b$
$y^*Ax^* - v^*x^* = cx^*$

將二式相減，可以得到 $y^*u^* + v^*x^* = y^*b - cx^*$

依據強對偶特性，$y^*b = cx^*$，所以 $y^*u^* + v^*x^* = 0$

因為各變數均非負，所以 $y^*u^* = 0$ 與 $v^*x^* = 0$ 兩條件均需成立。

原始問題 \ 對偶問題	有最佳解	無界限解	無解
有最佳解	✓		
無界限解			✓
無解		✓	✓