# Ch 13 確定性存貨模式

## Deterministic Inventory Models

持有存貨的理由

1. 經濟規模：購買原料零件、大量採購可得到 discount, 因 Truckload and full carload 得到之運費較便宜。
2. 平衡供需：調節季節性需求，避免人力的變動。
3. 專業化：使工廠的 production run 較長，然後再組裝零件。
4. 預防不確定性：預期價格上漲、罷工，可提高顧客之服務水準。
5. 當做緩衝：為了達到時間與地方效用，必須持有存貨，因為銷售管道的參與者有地域上的阻隔。

## 13.1 一般存貨模式 General Inventory Model

存貨模式一般要回答二個問題：

1. How much to order? 應該訂多少，也就是訂購數量。
2. When to order? 何時訂購

第一個問題就是要回答訂購量是多少。

要回答第二個問題，要決定什麼類型的存貨模式，一般存貨系統可分成二類

(1) periodic review 定期盤存。固定~~每~~星期、~~每~~個月下一訂單，通常是在每星期初或月初下單。

(2) continuous review 永續盤存。根據存貨水準 (Inventory level) 定訂一再訂購點 (reorder point)，每當存貨水準到達或低於再訂購點，就下一訂單訂貨。

一個一般化存貨模式包含下列主要成本

$$\begin{pmatrix}\text{total}\\\text{inventory}\\\text{cost}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Purchasing}\\\text{Cost}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Setup}\\\text{cost}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Holding}\\\text{Cost}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{Shortage}\\\text{Cost}\end{pmatrix}$$

Purchasing Cost：購貨成本 = @Price × Q
單價有可能因購買數量越多而有折扣

Setup Cost：(Ordering Cost) 整備成本 (訂貨成本) 下一訂單所發生的固定成本。

Holding Cost：持有成本，把存貨握在手上的成本。
e.g. 投資成本的利息，短缺、折舊、保養)

Shortage Cost：缺貨成本，缺貨時(~~每~~單位)所損失利潤或商譽。

## 13.2 Role of Demand in the Development of Inventory Models

一般而言分析存貨模式之複雜度取決於需求是確定性或机率性。在各類中需求又可分成隨時間變動與不隨時間变动。在實務中,需求可假設為以下四种類型

1. Deterministic and constant (static) with time.
2. Deterministic and variable (dynamic) with time.
3. Probabilistic and stationary over time.
4. Probabilistic and nonstationary over time.

第一類最简單,第四類最複雜。第一類最不可能在現實出現,而第四類最普遍。

The coefficient of variation $V = \dfrac{\text{Standard deviation}}{\text{Mean}} \times 100$

可用於決定需求的性質,基於以下一般準則.

1. 平均每月需求近似常数且 $V < 20\%$
   可視為 deterministic and constant
2. 平均每月需求在各月中些許变动且 $V < 20\%$
   可視為 deterministic and variable

3. 如果在 1 中，V > 20% 但近似常數，則是 probabilistic and stationary。

4. 平均數與 coefficient of variation 隨時間必許变动，是 probabilistic and nonstationary.

TABLE 13.1 Monthly (January through December) Consumption of Natural Gas

| Year | Natural-Gas Consumption in Cubic Feet | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | *Jan* | *Feb* | *Mar* | *Apr* | *May* | *Jun* | *Jul* | *Aug* | *Sep* | *Oct* | *Nov* | *Dec* |
| 1990 | 100 | 110 | 90 | 70 | 65 | 50 | 40 | 42 | 56 | 68 | 88 | 95 |
| 1991 | 110 | 125 | 98 | 80 | 60 | 53 | 44 | 45 | 63 | 77 | 92 | 99 |
| 1992 | 90 | 100 | 88 | 79 | 56 | 57 | 38 | 39 | 60 | 70 | 82 | 90 |
| 1993 | 121 | 130 | 95 | 90 | 70 | 58 | 41 | 44 | 70 | 80 | 95 | 100 |
| 1994 | 109 | 119 | 99 | 75 | 68 | 55 | 43 | 41 | 65 | 79 | 88 | 94 |
| 1995 | 130 | 122 | 100 | 85 | 73 | 58 | 42 | 43 | 64 | 75 | 80 | 101 |
| 1996 | 115 | 100 | 103 | 90 | 76 | 55 | 45 | 40 | 67 | 78 | 98 | 97 |
| 1997 | 130 | 115 | 100 | 95 | 80 | 60 | 49 | 48 | 64 | 85 | 96 | 105 |
| 1998 | 125 | 100 | 94 | 86 | 79 | 59 | 46 | 39 | 69 | 90 | 100 | 110 |
| 1999 | 87 | 80 | 78 | 75 | 69 | 48 | 39 | 41 | 50 | 70 | 88 | 93 |
| Mean | 111.7 | 110 | 95 | 82.5 | 69.6 | 55.3 | 42.7 | 42.2 | 62.8 | 77.2 | 90.7 | 98 |
| Std Dev | 15.54 | 15.2 | 7.5 | 7.99 | 7.82 | 3.95 | 3.4 | 2.86 | 6.09 | 6.91 | 6.67 | 6 |
| $V(\%)$ | 13.91 | 13.8 | 7.9 | 9.68 | 11.24 | 7.13 | 7.96 | 6.78 | 9.69 | 8.95 | 7.35 | 6.1 |

檢視 Table 13.1 中的 mean 與 the coefficient of variation, V 呈現兩項結果。

1. 平均消費不是常數，在冬季高平均消費相对於夏季低平均消費.

2. V is 合理的小 (<15%) 所以每月需求可視為近似確定性.

綜合上述，需求可視為 deterministic but variable。

(在 case 3 與 4 通常需要更多資料，以便決定其分配)

## 11.3 STATIC ECONOMIC-ORDER-QUANTITY (EOQ) MODELS

### 11.3.1 Classic EOQ Model 傳統經濟訂購模式

需求是常數，沒有缺貨，訂貨立即補貨

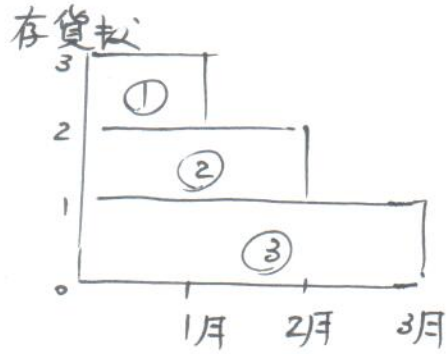
這是存貨模式最簡單的一種

K: setup cost 或 ordering cost ($/次).

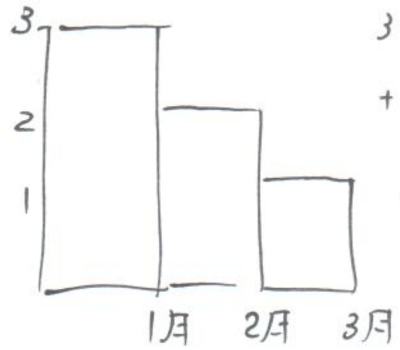
D: 單位時間的需求量 (units) 例如 個·年

h: 持有~~每~~單位存貨~~每~~單位時間的成本

$/per unit-unit time 例如 $ 元/個·年




亦可想成 ⇒




$3\cdot\frac{1}{12}$

$+2\cdot\frac{1}{12}$

$+1\cdot\frac{1}{12}$

$=\frac{1}{2}$

較易盤点

① 那存貨持有 $\frac{1}{12}$ 年

② 那存貨持有 $\frac{2}{12}$ 年

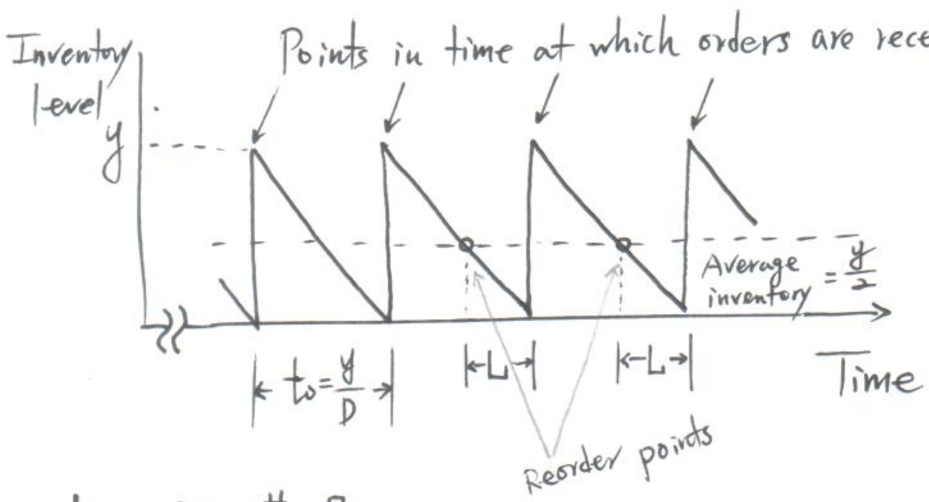
③ 那存貨持有 $\frac{3}{12}$ 年

若以年為時間單位，則持 $\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{1}{2}$ 個·年

存貨，假設 h = 10元/個·年

那麼這批持有成本為

$\frac{1}{2}$ 個·年 × 10元/個年 = 5元




$y$ = 訂購量

$t_0$ = ordering cycle length 訂貨週期時間 $= \frac{y}{D}$

$TCU(y)$：單位時間總成本

= 整備成本(單位時間) + 持有成本(單位時間)

$$= \left(\frac{D}{y}\right) \cdot K + \frac{y}{2} \cdot h$$

$$\frac{d\,TCU(y)}{dy} = -\frac{DK}{y^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

$$y^* = \sqrt{\frac{2KD}{h}} \qquad t_0^* = \frac{y^*}{D}$$

事實上訂單不可能被立即滿足，會有一定的 Lead time 前置時間，L。為下訂單與收到貨物之間的時間。

當存貨水準降至 LD 單位，再訂購點 (reorder point) 產生。

其中假設 $L < t_0^*$，但此种情形未必一定成立。令有效前置時間 effective lead time

$$L_e = L - nt_0^*$$ 其中 $n$ 是不超过 $\frac{L}{t_0^*}$ 的最大整数。訂購点發生在存貨水準為 $L_eD$ 單位時。

Example 13.3-1

U大学A校区 Neon light 以每天 100 單位更換，校方定期下單訂貨，花成本 \$100 下一次單，Neon light 放在倉庫估計每日成本 \$0.02 前置時間是 12 天，试决定 EOQ。

本例中 $D = 100$ 單位每日

$K = \$100$ 每一订單

$h = \$0.02$ 每單位每日

$L = 12$ 天

$$y^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 100 \times 100}{0.02}} = 1000 \text{ units}$$

$$t_0^* = \frac{y^*}{D} = \frac{1000}{10} = 10 \text{ days}$$

伴隨之週期時間為 10天，而前置時間 $L=12 > t_0^*(=10$天$)$，我們必須計算 $L_e$ 有效前置時間

$$L_e = L - n t_0^* \quad \text{其中 } t_0^* = 10,\ L=12$$

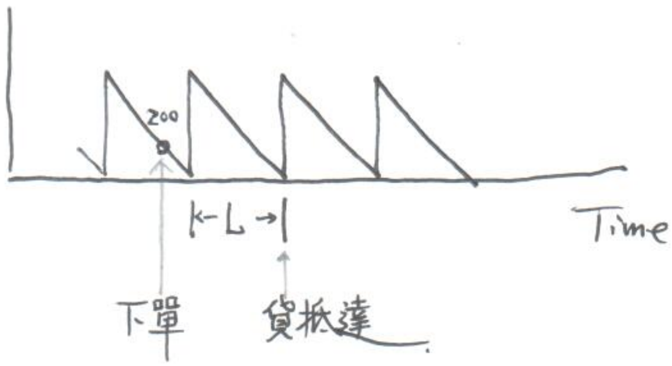
$$n = \left(\text{最大整數} \le \frac{L}{t_0^*}\right) = \left(\text{最大整數} \le \frac{12}{10}\right)$$

$$n = 1$$

$$L_e = 12 - 1 \cdot 10 = 2 \text{ 天}.$$

訂購點發生在存貨水準降至

$$L_e D = 2 \times 100 = 200 \text{ 單位時}$$




$$TCU(y) = K \cdot \frac{D}{y} + h \cdot \frac{y}{2}$$

$$= 100\left(\frac{100}{1000}\right) + 0.02\left(\frac{1000}{2}\right)$$

$$= \$20 \text{ 每天}.$$

## 11.3.2 EOQ with Price Breaks

EOQ model，沒有考慮每單位購買成本，因為常數，通常不會影响存貨水準。但如果購買數量，如果超過某一數量，通常會給予某些折扣。

本節考慮之存貨模式為立刻補貨和不允許缺貨並允許 Price Breaks。假設購買量 $y < q$ 則每單位成本是 $C_1$，購買量 $y \geq q$ 則每單位成本是 $C_2$，其中 $C_1 > C_2$

每週期總成本包含購買成本，訂貨成本，持有成本

當 $y < q$

$$TCU_1(y) = DC_1 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y$$

當 $y \geq q$

$$TCU_2(y) = DC_2 + \frac{KD}{y} + \frac{h}{2}y$$

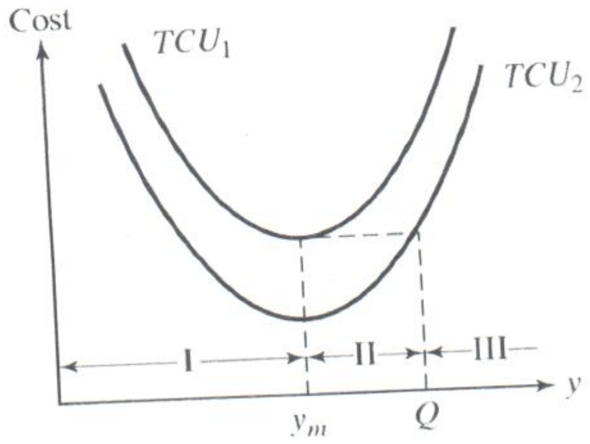



FIGURE 13.4
Inventory cost function with price breaks

$y_m$是$TCU_1$和$TCU_2$的最低處

$$y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}}$$

從上圖可以看出最適訂購量$y^*$決定於折扣發生的數量$q$。上圖可分成叁個區域I, II, III

區域I, II, III的決定是藉由$y_m$與Q的決定。

$Q\ (Q > y_m)$

$$TCU_1(y_m) = TCU_2(Q)$$

也就是在Q這一訂購量，使得

$TCU_2(Q)$的成本$= TCU_1(y_m)$的成本

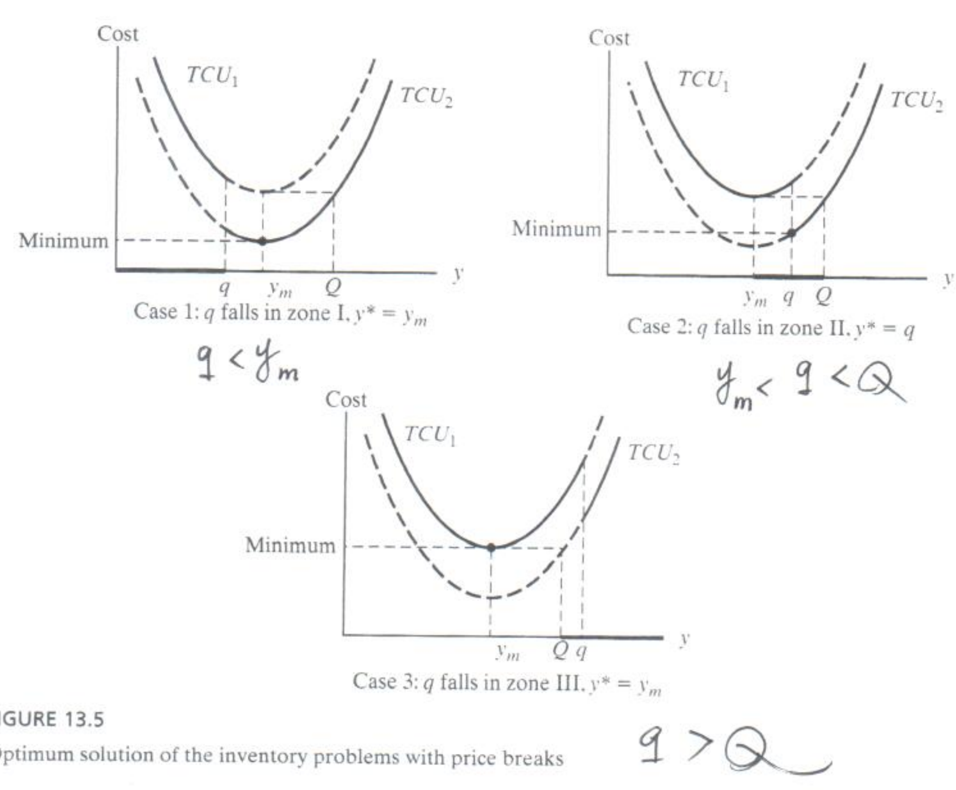



FIGURE 13.5
Optimum solution of the inventory problems with price breaks

綜合上述，決定 $y^*$ 最適訂購量之步驟：

step 1. 計算 $y_m=\sqrt{\frac{2KD}{h}}$ 若 $q<y_m$，則 $y^*=y_m$，否則 Go to step 2.

step 2. 由 $TCU_2(Q)=TCU_1(y_m)$ 計算 $Q$

定義出 region II 和 region III，

- 如果 $q$ 落在 region II，則 $y^*=q$
- 如果 $q$ 落在 region III，則 $y^*=y_m$

e.g. 13.3-2

修車廠買機油，每加崙 \$3，如果買超過 1000 加崙，則每加崙 \$2.5，相関成本如下

$h = \$0.02$ per gallon per day

$C_1 = 3$，$C_2 = 2.5$

$K = \$20$ $L = 2$ days $q = 1000$ 加崙

$D = 187.5$ 加崙每日

step1. 計算 $y_m = \sqrt{\frac{2KD}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 20\times 187.5}{0.02}} = 612.37$

$\because q = 1000 > y_m$ 所以 go to step 2.

step2. 由 $TCU_2(Q) = TCU_1(y_m)$ 決定 $Q$：

$$C_2 D + \frac{KD}{Q} + \frac{h}{2}Q = C_1 D + \frac{KD}{y_m} + \frac{h}{2}y_m$$

$$2.5\times 187.5 + \frac{20\times 187.5}{Q} + \frac{0.02}{2}Q = 3\times 187.5 + \frac{20\times 187.5}{612.37} + \frac{0.02}{2}612.37$$

$$\Rightarrow 0.01Q^2 - 106Q + 3750 = 0$$

$Q = 10564.5$（取大於 $y_m$）

於是 $q = 1000$ 落於 612.37 與 10564.5 之間

$y^* = q = 1000$ 為最佳訂購量

§ multiple item static model with shortage limitation §

有儲存空間限制之靜態多項產品模式

本節介紹這一模式，包含 $n$ 項產品，競爭有限之儲存空間。

令 $A$ 代表最大可供 $n$ 項產品儲存之空間，並假設第 $i$ 項產品所需之儲存空間為 $a_i$，則空間所需之限制式為 $\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A$，其中 $y_i$ 是第 $i$ 項產品所訂購的數量。本模式假設每一項產品立即補貨，沒有數量折扣與不允許缺貨。令 $D_i$，$K_i$，和 $h_i$ 分別為第 $i$ 項產品單位時間內需求，訂貨成本與持有成本。

這一問題可視為許多單一項目的問題，可寫成

Minimize $TCU(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i}{2} y_i \right)$$

s.t. $$\sum_{i=1}^{n} a_i y_i \le A$$

$$y_i \ge 0 \quad \text{for all } i$$

解上述問題是用 Lagrange Multipliers

方法求解.

首先將 Lagrangian function 寫出來

$$L(\lambda, y_1, y_2, \ldots, y_n) = TCU(y_1, y_2, \ldots, y_n) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{K_i D_i}{y_i} + \frac{h_i}{2} y_i \right) - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i y_i - A\right)$$

最適值 of $y_i$ 和 $\lambda$ 可分别对其求

偏導並設其 $=0$，解联立方程组.

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -\frac{K_i D_i}{y_i^2} + \frac{h_i}{2} - \lambda a_i = 0 \quad (i=1,\ldots,n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\sum_{i=1}^{n} a_i y_i + A = 0$$

此法可以 Nonlinear 軟体求解(補充管理數學與 LINGO 軟体)。或以課本之試誤法求解。

e.g. 考慮有三項存貨

| $i$ | $K_i$ | $D_i$ | $h_i$ | $a_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 | 0.3 | 1 $ft^2$ |
| 2 | 5 | 4 | 0.1 | 1 $ft^2$ |
| 3 | 15 | 4 | 0.2 | 1 $ft^2$ |

$A = 25\ ft^2$

$$\text{Min } Z = \frac{10 \cdot 2}{y_1} + \frac{0.3}{2} y_1 + \frac{5 \cdot 4}{y_2} + \frac{0.1}{2} y_2 + \frac{15 \cdot 4}{y_3} + \frac{0.2}{2} y_3$$

s.t.

$$1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + 1 \cdot y_3 \le 25$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

$y_1^* = 6.34$

$y_2^* = 7.09$

$y_3^* = 11.57$

## 13.4.1 No-Setup Model

考慮一N期生產排程問題，每期需求已知，為滿足需求，我们可以每期均以相同數量去滿足，例如、

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Demand | 120 | 150 | 80 | 50 |
| Production | 100 | 100 | 100 | 100 |

或每期生產变动數量去滿足，120, 150, 80, 50

當然可以綜合上述二者，以存貨或变动生產量(加班)或藉著 Backorder 累積待補來滿足需求。最主要目的是決定每期生產量使得總相關成本最小。

這個模式假設沒有 Setup Cost。一般而言允許缺貨。在本模式不允許缺貨，可運用運輸模式求解。

Example 13.4-1

| 月 | 產能 正常 | 產能 加班 | 需求 |
|---|---|---|---|
| 1 | 90 | 50 | 100 |
| 2 | 100 | 60 | 190 |
| 3 | 120 | 80 | 210 |
| 4 | 110 | 70 | 160 |

正常時間~~每~~單位生產成本 #6，加班時間~~每~~單位生產成本 #9，持有成本~~每~~單位~~每~~月 #0.1

公司不允許缺貨。

TABLE 13.2 Solution of Example 13.4-1

| | 1 | 2 | 3 | 4 | Surplus | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R_1$ | 6<br>**90** | 6.1 | 6.2 | 6.3 | 0 | **90** |
| $O_1$ | 9<br>**10** | 9.1<br>**30** | 9.2<br>**10** | 9.3 | 0 | **50 → 40 → 10** |
| $R_2$ | | 6<br>**100** | 6.1 | 6.2 | 0 | **100** |
| $O_2$ | | 9<br>**60** | 9.1 | 9.2 | 0 | **60** |
| $R_3$ | | | 6<br>**120** | 6.1 | 0 | **120** |
| $O_3$ | | | 9<br>**80** | 9.1 | 0 | **80** |
| $R_4$ | | | | 6<br>**110** | 0 | **110** |
| $O_4$ | | | | 9<br>**50** | 0<br>**20** | **70 → 20** |
| | **100 ↓ 10** | **190 ↓ 90 ↓ 30** | **210 ↓ 90 ↓ 10** | **160 ↓ 50** | **20** | |

以運輸模式求解，得到上述結果。

生產規劃

| | |
|---|---|
| 第1期 | 正常時間 生產 90 單位<br>加班時間 生產 50 單位 |
| 第2期 | 正常時間 生產 100 單位<br>加班時間 生產 60 單位 |
| 第3期 | 正常時間 生產 120 單位<br>加班時間 生產 80 單位 |
| 第4期 | 正常時間 生產 110 單位<br>加班時間 生產 50 單位 |

## 13.4.2 Setup Model

這節介紹有 Setup 成本，不允許缺貨，今介紹一動態規劃與啟發式的方法。

$Z_i$：第 $i$ 期訂購~~數~~量

$D_i$：第 $i$ 期需求

$x_i$：第 $i$ 期開始的存貨

$K_i$：第 $i$ 期 Setup cost

$h_i$：由 $i$ 期至 $i+1$ 期之~~每~~單位持有成本

$$C_i(Z_i) = \begin{cases} 0, & Z_i = 0 \\ K_i + c_i(Z_i), & Z_i > 0 \end{cases}$$

第 $i$ 期之生產成本函數，

為簡化問題，假設第 $i$ 期之持有成本是基於第 $i$ 期之期末存貨，定義如下

$$x_{i+1} = x_i + Z_i - D_i$$

令 $f_i(x_{i+1})$ 為給定 $x_{i+1}$，期間 $1, 2, \ldots, i$ 之最小存貨成本。向前遞迴方程式

$$f_1(x_2) = \min_{z_1 = D_1 + x_2 - x_1} \{ C_1(z_1) + h_1 x_2 \}$$

$$f_i(x_{i+1}) = \min_{0 \le z_i \le D_i + x_{i+1}} \{ C_i(z_i) + h_i x_{i+1} + f_{i-1}(x_{i+1} + D_i - z_i) \}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

第1期時 $z_1$ 正好等於 $D_1 + x_2 - x_1$，當期間 $i > 1$，$z_i$ 可以低至 0，因為 $D_i$ 可由 $1, 2, \ldots, i-1$ 期之生產滿足。

Example 13.4-2

| Period $i$ | 需求 $D_i$ (units) | Setup cost $K_i$ ($) | Holding cost $h_i$ ($) |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 | 3 | 3 | 1 |
| 2 | 2 | 7 | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 2 |

期初存貨1單位，$x_1 = 1$，前三單位之生產成本是\$10，每增加生產一單位之生產成本是\$20。

$$C_i(z_i) = \begin{cases} 10 z_i & 0 \le z_i \le 3 \\ 30 + 20(z_i - 3), & z_i \ge 4 \end{cases}$$

請決定最佳存貨策略。

**Period 1:** $D_1 = 3, 0 \le x_2 \le 2 + 4 = 6, z_1 = x_2 + D_1 - x_1 = x_2 + 2$

| | | $C_1(z_1) + h_1x_2$ | | | | | | | Optimal solution | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_1 = 2$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | | |
| $x_2$ | $h_1x_2$ | $C_1(z_1) = 23$ | 33 | 53 | 73 | 93 | 113 | 133 | $f_1(x_2)$ | $z_1^*$ |
| 0 | 0 | 23 | | | | | | | 23 | 2 |
| 1 | 1 | | 34 | | | | | | 34 | 3 |
| 2 | 2 | | | 55 | | | | | 55 | 4 |
| 3 | 3 | | | | 76 | | | | 76 | 5 |
| 4 | 4 | | | | | 97 | | | 97 | 6 |
| 5 | 5 | | | | | | 118 | | 118 | 7 |
| 6 | 6 | | | | | | | 139 | 139 | 8 |

Note that because $x_1 = 1$, the smallest value of $z_1$ is $D_1 - x_1 = 3 - 1 = 2$.

**Period 2:** $D_2 = 2, 0 \le x_3 \le 4, 0 \le z_2 \le D_2 + x_3 = x_3 + 2$

| | | $C_2(z_2) + h_2x_3 + f_1(x_3 + D_2 - z_2)$ | | | | | | | Optimal solution | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_2 = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| $x_3$ | $h_2x_3$ | $C_2(z_2) = 0$ | 17 | 27 | 37 | 57 | 77 | 97 | $f_2(x_3)$ | $z_2^*$ |
| 0 | 0 | 0 + 55 = 55 | 17 + 34 = 51 | 27 + 23 = 50 | | | | | 50 | 2 |
| 1 | 3 | 3 + 76 = 79 | 20 + 55 = 75 | 30 + 34 = 64 | 40 + 23 = 63 | | | | 63 | 3 |
| 2 | 6 | 6 + 97 = 103 | 23 + 76 = 99 | 33 + 55 = 88 | 43 + 34 = 77 | 63 + 23 = 86 | | | 77 | 3 |
| 3 | 9 | 9 + 118 = 127 | 26 + 97 = 123 | 36 + 76 = 112 | 46 + 55 = 101 | 66 + 34 = 100 | 86 + 23 = 109 | | 100 | 4 |
| 4 | 12 | 12 + 139 = 151 | 29 + 118 = 147 | 39 + 97 = 136 | 49 + 76 = 125 | 69 + 55 = 124 | 89 + 34 = 123 | 109 + 23 = 132 | 123 | 5 |

**Period 3:** $D_3 = 4, x_4 = 0, 0 \le z_3 \le D_3 + x_4 = 4$

| | | $C_3(z_3) + h_3x_4 + f_2(x_4 + D_3 - z_3)$ | | | | | Optimal solution | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $z_3 = 0$ | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| $x_4$ | $h_3x_4$ | $C_3(z_3) = 0$ | 16 | 26 | 36 | 56 | $f_3(x_4)$ | $z_3^*$ |
| 0 | 0 | 0 + 123 = 123 | 16 + 100 = 116 | 26 + 77 = 103 | 36 + 63 = 99 | 56 + 50 = 106 | 99 | 3 |

The optimum solution is read in the following manner:

$$(x_4 = 0) \rightarrow \boxed{z_3 = 3} \rightarrow (x_3 = 0 + 4 - 3 = 1) \rightarrow \boxed{z_2 = 3}$$

$$\rightarrow (x_2 = 1 + 2 - 3 = 0) \rightarrow \boxed{z_1 = 2}$$

Thus, the optimum solution is $z_1^* = 2, z_2^* = 3$, and $z_3^* = 3$, with a total cost of \$99.

**Silver-Meal heuristic.** This heuristic is valid only when the unit production cost is constant and identical for all the periods. For this reason, it balances only the setup and holding costs.

The heuristic identifies the successive future periods whose demand can be filled from the production of the current period. The objective is to minimize the associated setup and holding costs per period.

Suppose that we produce in period $i$ for periods $i, i + 1, \ldots,$ and $t, i \le t$, and define $\text{TC}(i, t)$ as the associated setup and holding costs for the same periods. Using the same notation of the DP models, we have

$$\text{TC}(i,t) = \begin{cases} K_i, & t = i \\ K_i + h_i D_{i+1} + (h_i + h_{i+1})D_{i+2} + \cdots + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k\right) D_t, & t > i \end{cases}$$

Next, define $\text{TCU}(i,t)$ as the associated cost per period—that is,

$$\text{TCU}(i,t) = \frac{\text{TC}(i,t)}{t - i + 1}$$

Given a current period $i$, the heuristic determines $t^*$ that minimizes $\text{TCU}(i, t)$.

The function $\text{TC}(i, t)$ can be computed recursively as

$$\text{TC}(i, i) = K_i$$

$$\text{TC}(i,t) = \text{TC}(i,t - 1) + \left(\sum_{k=i}^{t-1} h_k\right) D_t, t = i + 1, i + 2, \ldots, n$$

**Step 0.** Set $i = 1$.

**Step 1.** Determine the local minimum $t^*$ that satisfies the following two conditions:

$$\text{TCU}(i, t^* - 1) \ge \text{TCU}(i, t^*)$$

$$\text{TCU}(i, t^* + 1) \ge \text{TCU}(i, t^*)$$

The heuristic calls for ordering the amount $(D_i + D_{i+1} + \ldots + D_{t^*})$ in period $i$ for periods $i, i + 1, \ldots,$ and $t^*$.

**Step 2.** Set $i = t^* + 1$. If $i > n$, stop; the entire planning horizon has been covered. Otherwise, go to step 1.

### Example 13.4-4

Find the optimal inventory policy for the following 6-period inventory situation:

| Period $i$ | $D_i$ (units) | $K_i$ (\$) | $h_i$ (\$) |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 20 | 1 |
| 2 | 15 | 17 | 1 |
| 3 | 7 | 10 | 1 |
| 4 | 20 | 18 | 3 |
| 5 | 13 | 5 | 1 |
| 6 | 25 | 50 | 1 |

The unit production cost is \$2 for all the periods.

**Iteration 1 ($i = 1, K_1 = \$20$)** The function $\text{TC}(1, t)$ is computed recursively in $t$. For example, given $\text{TC}(1,1) = \$20$, $\text{TC}(1,2) = \text{TC}(1,1) + h_1 D_2 = 20 + 1 \times 15 = \$35$.

| Period $t$ | $D_i$ | $\text{TC}(1, t)$ | $\text{TCU}(1, t)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 10 | \$20 | $\frac{20}{1} = \$20.00$ |
| 2 | 15 | $20 + 1 \times 15 = \$35$ | $\frac{35}{2} = \$17.50$ |
| 3 | 7 | $35 + (1 + 1) \times 7 = \$94$ | $\frac{49}{3} = \boxed{\$16.33}$ |
| 4 | 20 | $49 + (1 + 1 + 1) \times 20 = \$109$ | $\frac{109}{4} = \$27.25$ |

The local minimum occurs at $t^* = 3$, which calls for ordering $10 + 15 + 7 = 32$ units in period 1 for periods 1 to 3. Set $i = t^* + 1 = 3 + 1 = 4$.

**Iteration 2 ($i = 4, K_4 = \$18$).**

| Period $t$ | $D_i$ | TC(4, $t$) | TCU(4, $t$) |
|---|---|---|---|
| 4 | 20 | \$18 | $\frac{18}{1} = \boxed{\$18.00}$ |
| 5 | 13 | $18 + 3 \times 13 = \$57$ | $\frac{57}{2} = \$28.50$ |

The calculations show that $t^* = 4$, which calls for ordering 20 units in period 4 for period 4. Set $i = 4 + 1 = 5$.

**Iteration 3 ($i = 5, K_5 = \$5$)**

| Period $t$ | $D_t$ | TC(5, $t$) | TCU(5, $t$) |
|---|---|---|---|
| 5 | 13 | \$5 | $\frac{5}{1} = \boxed{\$5}$ |
| 6 | 25 | $5 + 1 \times 25 = \$30$ | $\frac{30}{2} = \$15$ |

The minimum occurs at $t^* = 5$, which requires ordering 13 units in period 5 for period 5. Next, we set $i = 5 + 1 = 6$. However, because $i = 6$ is the last period of the planning horizon, we must order 25 unit in period 6 for period 6.

**Remarks.** The following table compares the heuristic and the exact DP solution. We have deleted the unit production cost in the dynamic programming model because it is not included in the heuristic computations.

| | Heuristic | | Dynamic programming | |
|---|---|---|---|---|
| Period | *Units produced* | *Cost (\$)* | *Units produced* | *Cost (\$)* |
| 1 | 32 | 49 | 10 | 20 |
| 2 | 0 | 0 | 22 | 24 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 20 | 18 | 20 | 18 |
| 5 | 13 | 5 | 38 | 30 |
| 6 | 25 | 50 | 0 | 0 |
| Total | 90 | 122 | 90 | 92 |

The heuristic production schedule costs about 32% more than that of the DP solution ($122 vs. $92). The "inadequate" performance of the heuristic may be attributed to the nature of the data, as the problem may lie in the extreme setup cost values for periods 5 and 6. Nevertheless, the example shows that the heuristic does not have the capability to "look ahead" for better scheduling opportunities. For example, ordering in period 5 for periods 5 and 6 (instead of ordering for each period separately) can save $25, which will bring the total heuristic cost down to $97.