BASIC	x_n	x_b	RHS
Z	$-C_n$	$-C_b$	0
x_b	N	$\boxed{B}$	b
Z	$-C_n$	$-C_b$	0
x_b	$B^{-1}N$	I	$B^{-1}b$
Z	$C_bB^{-1}N-C_n$	0	$C_bB^{-1}b$
x_b	$B^{-1}N$	I	$B^{-1}b$
Z	$C_bB^{-1}P_j-C_j$	0	$C_bB^{-1}b$
x_b	$B^{-1}P_j$	$\boxed{I}$	$B^{-1}b$

→ 講義中之 B^{-1}_{NEW}

Revisel Simplex Method 之步驟：

step1. 將 LP 轉成 standard form，尋求一可行解，並將其变數分成基本变數，x_b 与非基本变數，x_n。依此分類將目標函數係數 C 分成 C_b 与 C_n．以及 $A=[N, B]$ 利用 $C_b=0$，$B=I$ 代入公式 $x_b=B^{-1}b$ 及 $Z=C_bB^{-1}b$ 即可得出其解。

step 2. 計算非基本変数所屬

$C_B B^{-1} P_j - C_j$ 之值，檢驗最佳化條件，

最大化問題，全部 $Z_j - C_j$ 是非負

最小化問題，全部 $Z_j - C_j$ 是非正

則滿足最佳解條件，停止計算。

否則進入 step 3.

step 3. 利用所計算的 $Z_j - C_j$ 值，決定進入變數，在最大化問題，選 $-(Z_j - C_j)$ 值最大之非基本變數，在最小化問題，選 $(Z_j - C_j)$ 值最大之非基本變數。設 x_j 為所選之進入変數，計算其進入行之係數向量 $y_j = B^{-1} P_j$，其中 P_j 為 x_j 在原模式限制式之係数向量。以 minimum ratio 決定離去変数。令 $y_j = B^{-1} P_j = \begin{bmatrix} y_j^1 \\ y_j^2 \\ \vdots \\ y_j^m \end{bmatrix}$ 及

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}$$

$$\theta_r = \underset{i}{\text{minimum}}\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_j^i},\ y_j^i > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_j^r}$$

其結果，第 r 個基本変数為離去変数。

step 4. 欲計算新的基本可行解之前

須先計算 B_{NEW}^{-1}

$$B_{NEW}^{-1} = E \cdot B^{-1}$$

其中 $E = [e_1, e_2, \ldots, e_{r-1}, \zeta, e_{r+1}, \ldots, e_m]$

$$\zeta = \begin{bmatrix} -y_j^1/y_j^r \\ \vdots \\ 1/y_j^r \\ \vdots \\ -y_j^m/y_j^r \end{bmatrix} \leftarrow 第\ r\ 位置,$$

B^{-1} 為一開始 I 对応位置之矩陣。

[定義] 一 $n \times n$ 階矩陣，若其可由 $n \times n$ 階單位矩陣 I_n 經由一次基本列運算後獲得稱為基本矩陣 (elementary matrix)

(e.g.) 下列四個基本矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

第二列 $\times(-3)$　　第2列和4列交換　　第3列 $\times 3$ 加至第一列　　第一列 $\times 4$

[定理] 若基本矩陣 E 由 I_m 執行某列運算後獲得，若 A 為 $m \times n$ 階矩陣，則 EA 表示對 A 執行相同列運算所得的矩陣

(e.g.) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 10 & 9 \end{bmatrix}$ 如同 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{(3)}$

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

standard form

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + S_1 \qquad\qquad\qquad &= 6 \\ 2x_1 + x_2 \qquad + S_2 \qquad\qquad &= 8 \\ -x_1 + x_2 \qquad\qquad + S_3 \qquad &= 1 \\ x_2 \qquad\qquad\qquad + S_4 &= 2 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

令 $NBV = \{x_1, x_2\} = \{0, 0\}$.

$BV = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = \{6, 8, 1, 2\}$

令 $X_n = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad C_n = [3, 2]$

$X_b = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ $\quad C_b = [0, 0, 0, 0]$

$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [P_1 \; P_2 \; P_3 \; P_4 \; P_5 \; P_6]$$

$$\text{Max} \quad Z = C_n X_n + C_b X_b$$

s.t.

$$N X_n + B X_b = b$$

$$X_n, X_b \ge 0$$

BASIC	進入 x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_4	Solution
Z	-3	-2	0	0	0	0	0
S_1	1	2	1	0	0	0	6
離去 $\rightarrow S_2$	2	1	0	1	0	0	8
S_3	-1	1	0	0	1	0	1
S_4	0	1	0	0	0	1	2

BASIC	x_n	x_b	Solution
Z	$C_b B^{-1} N - C_n$ ③	0	$C_b B^{-1} b$ ②
x_b	$B^{-1} N$ ③′	I B^{-1}_{NEW} ④	$B^{-1} b$ ①

① $x_b = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

② $Z = C_b B^{-1} b = [0, 0, 0, 0] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$

③ 計算 NBV x_1, x_2 之 $Z_j - C_j$ 值

$Z_1 - C_1 = C_b B^{-1} P_1 - C_1 = -3 < 0$ (進入

$Z_2 - C_2 = C_b B^{-1} P_2 - C_2 = -2 < 0$

計算進入行之係數 $y_1 = B^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \min\{\frac{6}{1}, \underline{\underline{\frac{8}{2}}}, --\}$

可以 S_2 離去

令 $x_b = \begin{bmatrix} S_1 \\ x_1 \\ S_3 \\ S_4 \end{bmatrix}$ $\quad x_n = \begin{bmatrix} S_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$

則 $C_b = [0, 3, 0, 0]$ $\quad C_n = [0, 2]$

BASIC	x_1	x_2 進入	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	0	12
離去→ s_1	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
s_3	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
s_4	0	1	0	0	0	1	2

④ 計算新基底

$$\zeta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_{NEW}^{-1} = EB^{-1}$$

$$B_{NEW}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① $$x_b = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

② $$z = C_b B^{-1} b = [0, 3, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 12$$

③ 計算 NBV s_2, x_2 之 $z_j - c_j$ 之值

$$z_4 - c_4 = C_b B^{-1} P_4 - C_4 = [0, \tfrac{3}{2}, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = \frac{3}{2}$$

$$z_2 - c_2 = C_b B^{-1} P_2 - C_2 = [0, \tfrac{3}{2}, 0, 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 = -\frac{1}{2} \text{(進入)}$$

③ 計算進入行之係數 $y_2 = B^{-1}P_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \overset{RHS}{\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad \min\left\{ \underset{=}{\frac{2}{\frac{3}{2}}}, \frac{4}{\frac{1}{2}}, \frac{5}{\frac{3}{2}}, \frac{2}{1} \right\}$$

可以 s_1 離去

$$令\ x_b = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} \quad x_n = \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1 \end{bmatrix} \quad 則\ C_b = [2, 3, 0, 0]$$

$$C_n = [0, 0]$$

BASIC	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solution
Z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$12\frac{2}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
s_3	0	0	-1	1	1	0	3
s_4	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

④ 計算新基底

$$\zeta = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}_{NEW} = EB^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

① $$x_b = B^{-1}b = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

② $$Z = C_b B^{-1} b = [2, 3, 0, 0] \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 3 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = 12\frac{2}{3}$$

③ 計算 NBV s_2, s_1 之 $Z_j - C_j$ 之值

$$Z_4 - C_4 = C_b B^{-1} P_4 - C_4 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}, 0, 0] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} > 0$$

$$Z_3 - C_3 = C_b B^{-1} P_3 - C_3 = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}, 0, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} > 0$$

(停止)