CHAPTER 11 Traveling Salesperson Problem (TSP)

§ Example Applications of TSP §

傳統 TSP 旅行銷售員問題是找出 n 城市間之最短旅行路徑，滿足由起點出發並且拜訪每一城市一次，最後回到起點。TSP 包含兩組資料 1. 城市數目 n，2. 城市 i 與 j 之間的距離以 d_{ij} 表示，若 $d_{ij} = \infty$，代表城市沒有連接。

TSP 在現實生活中之應用十分廣泛，本節介紹 TSP 被應用於其他情境。

1. 在一生產設備中安排生產油漆之順序。油漆顏色不同，其清洗時間亦不同，規劃目標是安排生產順序使總生產時間(包含清洗準備時間)最短。
2. 電路板。机器手在電路板上鑽

洞以便裝上電子零件，目標是使所有洞鑽完所使用的時間最短。

3. 蛋白質分群。蛋白質分群使用蛋白質間之相似度，最好的分群是使鄰近蛋白質之相似度加總最大化。

$$\max\left\{\sum_{\substack{ij\text{ in}\\ \text{tour}}} S_{ij}\right\} = \min\left\{-\sum_{\substack{ij\text{ in}\\ \text{tour}}} S_{ij}\right\}$$

4. 天空物体影像。美國NASA使用衛星辨認天空影像，再定位衛星之燃料取決於辨認物体的位置，目標是決定辨認物体之順序，使總燃料最少。

5. Mona Lisa TSP art. 蒙娜麗莎的画像可以用連續的線段畫出，

Bosch, R. and A. Herman, "Continuous Line Drawing via the Travelling Salesman Problem," Operations Research Letters, Vol. 32, pp. 302-303, 2004.

§ TSP MATHEMATICAL MODEL §

Traveling Salesperson Problem (TSP)

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_{ij}$$

st

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} = (0, 1)$$

$$\sum_{ij \in S} x_{ij} \le |S| - 1$$

distance matrix

	1	2	3	4	5
1		2	3	4	5
2	2		6	7	8
3	3	6		9	10
4	4	7	9		11
5	5	8	10	11	

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if city } j \text{ is reached from city } i. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z = {} & 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 5x_{15} \\ & + 2x_{21} + 6x_{23} + 7x_{24} + 8x_{25} \\ & + 3x_{31} + 6x_{32} + 9x_{34} + 10x_{35} \\ & + 4x_{41} + 7x_{42} + 9x_{43} + 11x_{45} \\ & + 5x_{51} + 8x_{52} + 10x_{53} + 11x_{54} \end{aligned}$$

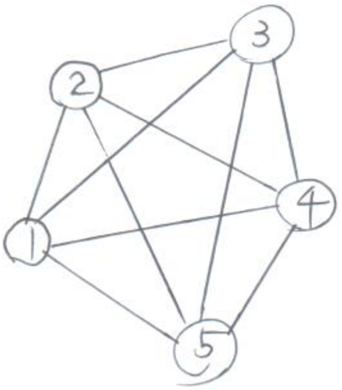
subject to

$$\begin{aligned} x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 1 \\ x_{21} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{45} &= 1 \\ x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} &= 1 \\ x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 1 \\ x_{12} + x_{32} + x_{42} + x_{52} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{43} + x_{53} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{54} &= 1 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 1 \end{aligned}$$

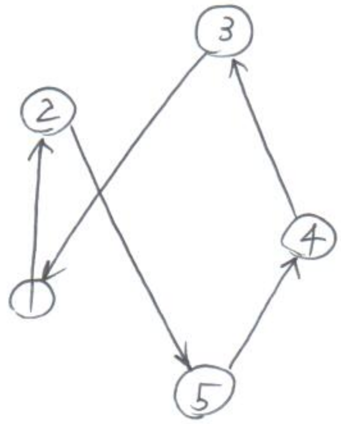
$$\forall x_{ij} \in (0, 1).$$

使用軟体可將上述問題解出。

以任一五個城市為例

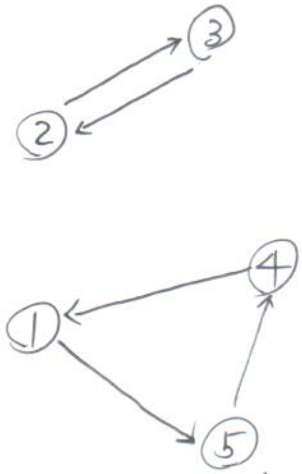


5 city problem



Tour Solution

($x_{12}=x_{25}=x_{54}=x_{43}=x_{31}=1$)



subtour solution

($x_{23}=x_{32}=1$ $x_{15}=x_{54}=x_{41}=1$)

Tour solution 將每一城市拜訪一次回到起點，這便是TSP的最佳解，但隨城市數目变大，幾乎不曾發生，大部分會產生subtour solution，因為有些子路徑是獨立存在，所以必須經過額外的計算方能破解子路徑，得到 optimal solution.

Example. 彩虹公司生產白(W)黃(Y)紅(R)黑(B)四種油漆,連續生產間需清洗設備,其相關清潔時間如下,目標為決定生產順序使總清洗時間最小。

TABLE 11.1 Interbatch Cleanup Times (in minutes) for the Paint Production Problem

Paint	Interbatch cleanup (min) *White*	*Yellow*	*Black*	*Red*
White	∞	10	17	15
Yellow	20	∞	19	18
Black	50	44	∞	22
Red	45	40	20	∞

In the TSP model, each color represents a "city," and the clean-up time between two successive colors represents "distance." Let M be a sufficiently large penalty and define

$$x_{ij} = 1 \text{ if paint } j \text{ follows paint } i \text{ and zero otherwise}$$

The TSP model is given as

$$\text{Minimize } z = 10x_{WY} + 17x_{WB} + 15x_{WR} + 20x_{YW} + 19x_{YB} + 18x_{YR} + 50x_{BW} + 44x_{BY} + 22x_{BR} + 45x_{RW} + 40x_{RY} + 20x_{RB} + M(x_{WW} + x_{YY} + x_{BB} + x_{RR})$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_{WW} + x_{WY} + x_{WB} + x_{WR} &= 1 \\
x_{YW} + x_{YY} + x_{YB} + x_{YR} &= 1 \\
x_{BW} + x_{BY} + x_{BB} + x_{BR} &= 1 \\
x_{RW} + x_{RY} + x_{RB} + x_{RR} &= 1 \\
x_{WW} + x_{YW} + x_{BW} + x_{RW} &= 1 \\
x_{WY} + x_{YY} + x_{BY} + x_{RY} &= 1 \\
x_{WB} + x_{YB} + x_{BB} + x_{RB} &= 1 \\
x_{WR} + x_{YR} + x_{BR} + x_{RR} &= 1 \\
x_{ij} = (0, 1) &\text{ for all } i \text{ and } j
\end{aligned}$$

Solution is a tour (loop)

The use of the penalty M in the objective function is equivalent to deleting x_{WW}, x_{YY}, x_{BB}, and x_{RR} from the model. However, the deletion of these variables destroys the underlying assignment-model structure needed to solve the TSP by B&B.

TSP 解,一種很直接的求解方法為窮舉法 exhaustive enumeration. 以一個

n城市問題，將有(n-1)!情形，以上例只有6種情形。表11.2例舉所有情形

TABLE 11.2 Solution of the Paint Sequencing Problem by Exhaustive Enumeration

Production loop	Total cleanup time
$W \to Y \to B \to R \to W$	10 + 19 + 22 + 45 = **96**
$W \to Y \to R \to B \to W$	10 + 18 + 20 + 50 = 98
$W \to B \to Y \to R \to W$	17 + 44 + 18 + 45 = 124
$W \to B \to R \to Y \to W$	17 + 22 + 40 + 20 = 99
$W \to R \to B \to Y \to W$	15 + 20 + 44 + 20 = 99
$W \to R \to Y \to B \to W$	15 + 40 + 19 + 50 = 124

$W \to Y \to B \to R \to W$ 為最佳解。

但窮舉法不適用於一般TSP求解。因為隨著問題規模變大，(n-1)!十分耗時且在合理時間內無法獲得答案。

Open-tour TSP 開放途程TSP，當回到原開始地點是不必需是 Open-tour TSP。

以上例，例如 $B \to W \to Y \to R$，R不用連接回B。

這情形可解釋為n城市，藉由增加一虛擬城市，n+1，其至其他城市之

距離均為零。以彩虹公司為例，新的矩陣如下.

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 17 & 15 & 0 \\ 20 & \infty & 19 & 18 & 0 \\ 50 & 44 & \infty & 22 & 0 \\ 45 & 40 & 20 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \infty \end{pmatrix}$$

第五行，第五列代表虛擬的顏色.

以電腦求解，最佳途程是

W → Y → R → B → Fictitious → W，時間=48 minutes.

上述解重新安排為起迄點均為 Fictious color

Fictitious → W → Y → R → B → Fictitious

將上述 Fictitious color 移除，我們可以得到 open-tour solution

W → Y → R → B

值得注意的是 open-tour 最佳解不可以直接由最佳解（closed-tour）獲得（

W → Y → B → R → W）

11.3 EXACT TSP ALGORITHMS

本節介紹兩種 exact TSP algorithms：B&B 和切面法。在理論上這兩種方法能產生最適解，但在合理的時間內可能無法獲得最適解，所以一般均以 heuristics 求解。

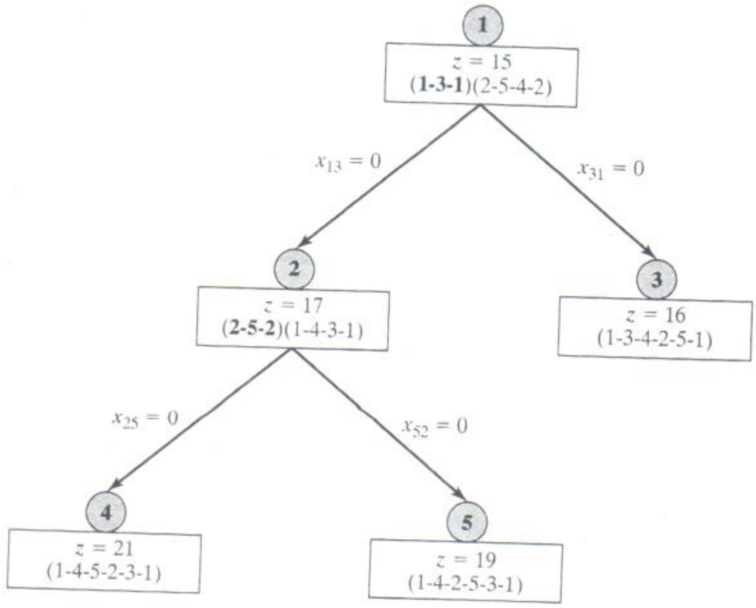
11.3.1 B & B Algorithm

考慮一五城市距離矩陣

$$\|d_{ij}\| = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 3 & 6 & 9 \\ 5 & \infty & 5 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & \infty & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 3 & \infty & 4 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

求解上述矩陣伴隨之指派問題，其解為 $z = 15$，$x_{13} = x_{31} = 1$，$x_{25} = x_{42} = x_{54} = 1$，其餘均為 0。由解答可以看出，存兩個子迴路 1-3-1，2-5-4-2。任意選取一途徑 1-2-3-4-5-1 當做起始之上界，其距離為 $10+5+7+4+3 = 29$

由此可知，最佳解不可超過29。B&B不斷尋找更小的上界。



先由最小的 subtour 開始 1-3-1，令 $x_{13}=0$ 或 $x_{31}=0$（node 2 或 node 3），任意挑選 node 2，再次解 Assignment problem，得出 $Z=17$，2-5-2 1-4-3-1，一個 subtour 和一途程。令 $x_{25}=0$ 或 $x_{52}=0$（node 4 或 node 5），再次求解 Assignment problem，得出 node 4，$Z=21$ 1-4-5-2-3-1，node 5，$Z=19$，1-4-2-5-3-1，回到 node 3 求解指派問題得到 $Z=16$，1-3-4-2-5-1。

在此搜尋过程中，上界由原先29換成node 4的21，再換成node 5的19。最後又換成node 3的16。所有節点均被檢查過所以最小上界16，即為最佳解 1-3-4-2-5-1。